1

RENATI

DES-CARTES

GEOMETRIÆ

PARS SECVNDA.

Cujus contenta sequens pagina exhibebit.

CATALOGUS

eorum,

Quæ in hâc secundâ parte continentur.

LECTORI BENEVOLO

I. HUDDE S. P.

IN Galliis eram cum epistolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me suscepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi constaret, num quædam nimis obscurè expressa essent, vel etiam errata irrepsissent; Quæcunque inveni, illa sunt quæ sequuntur.

Ad clariorem sensum.

p.424 l. 15. *Excepto* &c. Cum $x - a \infty 0$, multiplicatur per $b - c$, resultat $bx - cx - ab + ac \infty 0$, seu $x \infty \frac{ab - ac}{b - c}$; si ponas jam $b - c \infty 0$, non sequitur valorem x per hanc æquationem non posse inveniri, quandoquidem Nominator $ab - ac$ per $b - c$, dividi potest, sed tum sequitur cum Nominator per Denominatorem non dividi potest, vel cum ambo per eandem quantitatem indivisibiles sunt: Notandum ergo est Denominatorem hic considerari sine relatione ad Nominatorem, veluti patet ex sequentibus, 1°. *Observandum venit num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2°. *si reperiantur, num utramque æquationem dividant*. Sed hæc omnia fortassis clarius sic intelligentur. Excepto tantum si æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita sit ab una parte, reliqui, qui ab altera sunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris divisor aliquis, Nominatorem dividat, quod si contingat, videndum est, priusquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem divisorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominatorem, vel Denominatoris divisorem aliquem, divisibilis sit. p. 459. l. 10. vel sic lege, æquatio illa semper indivisibilis erit per x, x^3, x^5, &c., 8, vel per xx, x^4, x^6, &c., — quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. pro *omnes quantitates* pone omnia membra p.492, l.13. pro *Regula*, scribe Methodo. p 451 & 456, l. 1. lege, nullus terminus est ∞ 0. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C.}$ *ex* $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ *extrahi poterit*; scribe, extrahendo $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$. & pro, *sed cum* $\sqrt{C}$ *&c.*, usque ad, *liceat &c.*; pone, sed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ p.389, vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod sufficit, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex æquatione Proposita sive numerali, sive literali sit, inveniri, cum pro literis numeros, vel o, ad arbitrium assumere liceat. p. 502, l.31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic sumitur pro redigi ad duas alias, ex quarum multiplicatione Proposita æquatio produci potest. Errata, quæ irrepserunt, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas est me, non sine admiratione, in Epistolis meis, quæ tam sedulam typothetarum operam requirebant, tam paucos errores ostendisse, nisi cogitarem D. Elzevirios & Clarissimum Schotenium totis viribus huic operæ incubuisse, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impressum sit, quam quis fortassis exspectasset.

CARMEN

IN LAUDEM

FR. à SCHOOTEN,

Mathematicorum ocelli.

ScotenI cum ſcripta legis, ſe promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores ſpectas, ſe præbet ubique
Spectandam integritas, ac ſine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hic jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quod, ingenium cum ſit ſuperabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

ΠΕΡΙ'

ΦΡΑΓΚΙ'ΣΚΟΥ ΣΚΩΤΗ'ΝΟΥ,

τῦ μακαρίτυ,

Διάλογος Μαθήσεως, Εὐσεβείας, καὶ Ὁδοιπόρου.

Μαθ. Τί κλαίεις; στενάχεις τί; νέον φρένας ἵκετο πένθος;
(Ἐξαύδα, καὶ μὴ κεῦθε νόῳ, Εὐσεβίη)
Ἠδ' ἐσθῆτα μέλαιναν ἕεσσαι; χάμαι πέτεσιν
Ἤματα καὶ πάσας νύκτας ὀδυρομένη;
Εὐσ. Θυμήρης μοι φὼς ἀπώλετο, φέρτατος ἀνδρῶν,
Ὅς Σοφίῃ θείην μῖξε ταπεινοσύνην.
Τὸν Βάταβων λαὸς δυσὶ ἐγείνατο, τὸν τε μαθητὴν
Δεῦρ' ἀπὸ ἐξ ἀπαλοῦ ἀρχίσοον βρέφεος.
Μ. Σκώτηνος; Ε. κεῖνος. Μ. Σκώτηνος; ὁ λείψανον ἀνδρῶν
Χρυσείου γένεος, λείψανον ἡμιθέων;
Σκώτηνος; ὃ ἱ μοῦσαι ἴσον φαίεσσι φίλησαν,
Ἠδέ μιν ὥσπερ πασῶν ἀντεφίλησε θεῶν·
Ὅς περ ἐῶρ' ὄπιθεν, αἰεὶ φῶς τε σκοτεινὸν
Συμμύστεις, ζοφερῷ κεῖται ἐνὶ σκότεϊ;
Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κεῖται, πᾶσιν μερόπεσσι φαεινός,
Οἷς τι καὶ Εὐσεβίην, καί σε, φίλη, ἴφιλον.
Μαθ. Οὐκ ἀλόγως ἀπεράτως τε, θεά, κατὰ δάκρυα λείβεις,
Καὶ στέρνον πλήττεις αἰὲν ὀδυρομένη.
Δὸς τόπον, οὐχ ὅπως (τὸ πάλαι τάχα ποθέσαιμι
Ὅττι ἦν πάντων πολὺ μᾶλλον μακάρων)
Γαῖαν κινήσαιμι, ἀκίνητον περ ἐοῦσαν,
Αὐτὰρ ὅπως, στοναχὴν σεῖο μετουσαμένη,
Αὐτὴ ἀκίνητος μίμνω, νεκρῆς τε λυπηρὸν
Μνῆμα τόσον Νιόβης πᾶσιν ἐρημαίοις·
Ὁδοιπ. Ὢ θεαί, ἐκ ἐστι δακρύειν ἄλις; ὑπὸ τῇ νεκρὸς
Δάκρυσι καὶ στοναχαῖς εἰς φάος αὖθις ἴοι.
Ἀλλ' ἴτε, κ' εὔδμητον ῥόδοις καταπάσσατε γαῖαν,
Λείρια μιξάμεναι καὶ κυαναυγὲς ἴον·
Εὔχεσθ', ὥσπερ ἦν μερόπων βαρὺς οὐδενὶ ζωὸς,
Οὕτω καὶ κούφη γαῖα νεκρῷ τελέθῃ.

M. ΣΑΛΑ'ΔΟΣ,

ἱερεὺς Ἀμστλ.

PRINCIPIA
MATHESEOS
VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO
AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES,

Conscripta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio tertia, priore correctior.



AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.

Sumptibus Societatis.

Generis & virtutum Nobilitate Perillustri & Generoso Heroï,

D. CHRISTIANO THOMÆ,
TOPARCHÆ IN STAVGARD,
Equiti Aurato, Sereniſſimæ Regiæ Majeſtatis Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori primario, Regiæ Academiæ Hafnienſis Conſervatori ſummo, Patrono incomparabili.

NOn minùs verè quam eleganter Cicero lib. 1. Tuſc. quæſt. *Magni*, inquit, *eſt ingenii revocare mentem à ſenſibus, & cogitationem à conſuetudine abducere.* Cùm enim mens noſtra, quam in nobis concluſam circumferimus, divina quædam particula habeatur, nihil ſanè illi gratius accidere poteſt, quàm, cùm contemplando à corporeis rebus laxatur, originique ſuæ quàm ſimillima redditur. Senſuum

quippe usurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præstant; mente verò quia non gaudent, universam hanc mundi machinam, quasi tabulam pictam aspiciunt, nec cogitant quâ de causâ quóve modo tot varietates rerum sint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt semetipsos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent sese sensuum judicio ita mancipari, ut ea sufficere putent, quæ manibus quasi palpare possunt; ac pauca velint si non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ sensus non approbant, & paucissima eligant, nisi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri possumus, hoc propositum utile esse atque necessarium, ut initio juvetur cogitatio nostra & intel-

intellectus; unde factum est, quòd Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia subsidia invenerint; Sed experimentis ejusmodi vix acquiescere debent magna ingenia, nec potest is, qui sapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet, multa facilè mereri mentis assensum, & esse verissima, etiamsi sensuum judicio pro veris non agnoscantur: & vice versâ, sensus quædam approbare; quæ, quia falsa, ratio nullo modo admittere potest. Atque hæc licèt omnibus in confesso sint, non desunt tamen, qui nihil nisi Praxin amantes, Theoriam & speculationes omnes odio prosequuntur, atque ut inutilia eliminant: quos pertinaciæ suæ serò nimis pœnitebit, cùm aliorum imperio ita subjecti esse coguntur, ut ne

in Praxi quidem ſolita obſtacula removere ſciant, nec unquam novi quicquam addiſcant, niſi quod vel caſus ipſis, vel aliorum humanitas ſuppeditaverit. At alii, quorum animus longiùs exſpatiatur, & demonſtrationes cauſasque inquirit, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non eſſent repudianda, etiamſi humani ingenii imbecillitas, aut uſus raritas, ea ſtatim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonſtrata atque inventa ſunt, quæque uſus dudum confirmavit, niſi vel ipſas demonſtrationes penetrare, eaſdemque invenire poſſint; adeoque

ſuper-

ſuperflua reſcindere, defectus ſupplere, & deperdita reſtituere queant. Neque enim exiſtimandum eſt, majores noſtros omnem poſteris præripuiſſe materiem, quâ excolatur ingenium; cùm contra ſocordiæ meritò nos incuſarent, ſi plus temporis in ſcriptis ſuis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipſi in incognitis inveniendis poſuêre, viderent. Ad quæ invenienda cùm non aliâ viâ, (quantum conſtat) quàm quæ per compoſitionem & reſolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potiùs ingenii facultas aut induſtria, uſu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opuſculum. quæ poſtquam innotuit,
lon-

longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta sunt, in lucem prodière. Non patitur tempus & lex scribendi, ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantùm ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, sed etiam Opticam aliasque scientias manaverint emolumenta. Nihil enim sani antehac de visu novimus, cum omnia hìc, sicut in aliis artibus, quæ materiæ immersæ, non abstrahuntur à sensibus, ad directionem mentis, disputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonstrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hospites sunt, sat sciunt, quàm incerta, quamque defectuosa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falsa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus Dio-

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis optari poteſt perfectius, nihil certius. ſed de his forſan aliàs. Id mihi in præſens ſufficit, hanc artem ſibi proprio jure vendicare non ſolùm ea, quæ de Matheſeos utilitate, deque Arithmeticæ, Geometriæ, Aſtronomiæ, & Muſicæ præſtantia, tot rationibus, tot voluminibus, totque ſeculis dicta ſunt, ſed & multò plura; quod facilè demonſtrare poſſem, niſi plurimis, qui hæc penitiùs introſpicere dignantur, notum id fore ſcirem. Nec opus mihi eſt, multa coram Te, Heros Perilluſtris, de hujus artis totiusque Matheſeos utilitate dicere: quoniam, dum animus tuus magna ſemper & excelſa meditatur, Mathematicas etiam ſcientias coluiſti & amplexus es, nihilque Tibi ad ſapientiæ complementum deeſſe voluiſti. Sed malo de

Heroïcis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium teſtimonium implorare, quàm in præſens pauca dicere. Ars ſanè Analytica perſpectum habet, cujus viri præſidium expectat, cùm implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Matheſis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel ſapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perilluſtris, nomini tuo Principia hæc inſcribi, & fructum inceptæ peregrinationis ſerenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hoſtibus, quibus ſeculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipſis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia eſſe & ex aliis deſumpta; quâ cenſura quam-

quamquam ſciam hoc ſcriptum non poſſe notari; tamen præſagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curioſa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti, faſtidio commoti, ſubtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet ſibi Ars Analytica à talibus hoſtibus, nam, cum doctiſſimis quibusque Mathematicis, quibus ſeculum hoc quaſi ſuperbit, probetur, de reliquis ipſi minus eſt laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defenſio requiritur, niſi quam experientia, & ipſius rei intellectæ uſus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, ſi tuo exactiſſimo limatiſſimoque judicio probentur, nullius in poſterum cenſuram aut notam pertimeſcent. Neque ego exilitate operis deterritus, ſed contra utilitate po-

tius instigatus, Tibi hæc consecrare sum veritus: & quidem tantâ majore fiduciâ, & spe certiore, quantò certius mihi constat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt, favere; quem favorem quotidie familia nostra sentit, & grato animo semper recolit. Vale regni Daniæ decus, & æqui bonique consule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS TVAE

Scribebam Leidæ, Anno CIↃ IↃC L. *Calend. Iun.*

Devotissimus & obsequentissimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

LECTORI S.

Cum omnes sapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamque indignum sapientis gravitate atque constantia sit, quàm aut falsum sentire, aut quod non satis exploratum sit, sine ulla dubitatione defendere: nescio quo fato fiat, quòd non operam dent ejusmodi studiorum viam ingredi, quâ mens adsuescat verum à falsis & dubiis distinguere. Quandoquidem enim à teneris adsuescere multum est, egregiè sibi consulerent, si ad Mathesin excolendam ab ineunte ætate animum appellerent. Mathematicas autem disciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari potest, modò consideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmissis necessitate quadam sequi, vel verum, vel dubium, vel falsum, prout præmissæ variis modis sese habuerint: Adeò ut, etsi non aliis usibus inserviret Mathesis, tamen vel hoc nomine, ad sui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea speraretur emolumentum. Quod cum abundè observatum & usu comprobatum sit à Veteribus, quos plerique nostra ætate ita suspiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidisse videantur, quàm quantum nostrorum ingeniorum acies intueri potest; inter alia mirari subit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deseruisse. Quippe compertum est, antiquos Philosophos non permisisse, ἀγεωμετρήτους scholas suas ingredi, ut ad Sapientiæ studium admitterentur, quique ante non haberent λαβὰς τῆς φιλοσοφίας. Quod sanè propositum, non ratione prudentius, quàm eventu felicius fuit: cum hanc fuisse causam, quòd ad illam pertigerint scientiam, quam posteritas tantopere miratur, & quò virtute sua nonnulli eniti se posse desperant, conjiciam. Frustra enim spectatur fructus disciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere

 potest,

potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui eò ferunt, negligit. Mathesis autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognituque facillimis, ad difficiliora, atque remotissima quæque cognoscenda perducat juniores, qui præconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quæ animis provectiorum inhærent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam Mathesis variis partibus constat, quæ omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illæ omnes tractari, & quantitas hæc in universali & abstracto per literas Alphabeti concipi possit. Ita enim factâ ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportunè nobis Nobilissimus D. Des-cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusâ à se, hactenus incognitâ, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita naturæ mysteria pandit, ut veræ sapientiæ studium, humanarumque scientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicas hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantùm invitos laudumque suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque, humanum ingenium in iisdem progredi quidve præstare valeat determinent. Verùm enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices

dices stirpesque non item: sic multi ad summa pervenire optarent, nisi in elementis hærere opus haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusque esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant, quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita sint ulla principia, quæ ad adita hujus Methodi ducerent; quid mirum? si multi in ipso limine hæsitaverint, pluresque, quos, re inexpertâ, desperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctissimi ejus Commentatores à semetipsis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas subtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum sternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipso olim, quàm à multis hodie expetita, præstitum esse repererim: diu multumque inter spem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea desiderari, quæ ad scientiarum incrementa emunctioris naris homines necessariò requiri jampridem censuerunt. Ego sanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti compos factus, postquam ad hasce oras Academiam Illustrem, quæ Leidæ est, accessi, Vir Celeberrimus atque Doctissimus Franciscus à Schooten, Matheseos ibidem Professor publicus, me Artem Analyticam, hancque Methodum, tam eximia fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam industriam defuisse crediderim. Quocirca sepositâ privati commodi æstimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis usibus destinaveram, publici juris redderem, de elementis hisce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cœpi. Et licèt vererer ne amicitiæ jura, quæ inter nos cum fido semper servari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam sperabam, si non nisi officiosa fraude fallerem, quæ gloriæ ejus, qui se bono publico

publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit: quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentiæ pignus atque indicium omittit, non modò veniam hujus zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemque ingenii & consilii sui porrigere. Operis brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hîc desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco meliùs intelligi, simulque prædictis locis illustrandis inservire potuerint, in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeò ut, quicunque tantùm Arithmeticæ Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levique numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dni. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reseratam omni ei, quod ab Algebra & Analysi Geometrica exspectari potest: ideoque se Matheseos Universalis constitutionem animo comprehendisse. neque enim existimo, hisce intellectis, operæ pretium fore, Algebræ vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licèt leviorem ejus notitiam, vel ipse D. Des-Cartes, antehac, ad suæ Geometriæ Methodum intelligendam, requisiverit. Vale.

PRIN-

PRINCIPIA MATHESEOS VNIVERSALIS,

SEV

INTRODVCTIO AD GEOMETRIÆ METHODVM RENATI DES CARTES.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SIMPLICIVM.

CUM in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile sit à simplicissimis & cognitu facillimis ordiri; haud inconsultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehensionum Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem versantur, ad ea primùm attendere, quæ non aliquam ejus speciem excludere, sed eas, quocunque se habeant modo, sub certis notis cuique obviis repræsentare possint. Vnde cum in universa illarum Scientiarum constitutione, licèt diversa objecta respiciant, non nisi relationes sive proportiones quædam, quæ in iis reperiuntur, considerentur; consentaneum est rationes atque proportiones illas seorsim spectare, easque literis Alphabeti, utpote notis simplicissimis nobisque cognitissimis, insignire. Neque enim ratio ulla est, quo minùs per *a*, *b*, *c*, &c. concipiantur magnitudines *a*, *b*, *c*, &c. quàm pondera aut numeri iisdem characteribus designati. Attamen quia tum phantasiæ tum sensibus ipsis, nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportiones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præ-

Vide dissertationem de methodo, parte secunda.

ſtat per prædictas literas ſolummodo lineas rectas concipere. Hinc ſi duæ fuerint quantitates deſignatæ per a & b, intelligentur per ipſas duæ differentes lineæ rectæ, diverſæ ſcilicet longitudinis: ita ut per a intelligatur longitudo ſeu quantitas unius, & per b longitudo ſeu quantitas alterius. Non ſecus atque per a & a, aut per b & b duæ intelliguntur lineæ æquales; niſi indicaveris ſuppoſueriſve a eſſe æqualem ipſi b, vel a & b ejuſdem eſſe valoris, id quod ſic denotatur $a \propto b$. Et ſic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua ſit aliquoties ſumenda, oportet tantùm numerum convenientem ipſi literæ præfigere: Vt ad deſignandum, lineam a eſſe bis ſumendam, ſcribo $2\,a$. Sic & ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipſius b, ſcribo $2\,b$, $3\,b$, $4\,b$ &c. Nec aliter fit ſi ad deſignandum ſemiſſem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ a, ſcribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri ſolet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. ſic & duas tertias, tres quartas, &c. ipſius b, ita deſignaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel ſic, $\frac{2\,b}{3}$, $\frac{3\,b}{4}$, atque ita de aliis.

Iam cum in univerſa Matheſi operationes omnes ad quinque diverſas (vulgò Species dictas) reduci poſſint, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum extractio; conſequens eſt ut oſtendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas ſint inſtituendæ.

De Additione quantitatum ſimplicium.

IGitur ad addendum lineam a ad lineam a, ſcribo pro ſumma $2\,a$: ſic & ad addendum $2\,b$ ad $3\,b$, ſcribo $5\,b$. Lineæ enim eiſdem literis ſi denotantur, oportet tantùm numeros præfixos addere, & ſummam eidem literæ præfigere. Si verò diverſæ fuerint, additio fiet interpoſito ſigno $+$, quod denotat plus. Vt ſi ad lineam a ſit addenda linea b, ſcribo $a + b$, hoc eſt, a plus b, quo indicatur b eſſe additam ipſi a, vel adhuc eſſe addendam. Vbi patet dictum ſignum ſemper eſſe referendum ad ſequentem literam, ſeu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, ſi plures in unam ſummam ſunt colligendæ. Vt ad addendum $2\,b$, b, & $3\,b$, ſcribo $6\,b$. Sic & ad addendum a, b, & c, ſcribo $a + b + c$.

Exem-

Exempla additionis simplicium.

				2 b
Add. {	a.	2 b.	3 d.	b.
	a.	3 b.	d.	3 b.
Summa	2 a.	5 b.	4 d.	6 b.

				a.
Add. {	a.	a.	3 c.	b.
	b.	2 b.	4 d.	c.
Summa	$a+b.$	$a+2b.$	$3c+4d.$	$a+b+c.$

Vbi notandum, in additione literarum *d* & 3 *d*, cogitandum esse literam *d* sibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in sequenti exemplo & similibus est observandum: ut &, cùm plures adduntur diversæ literæ, perinde esse quo ordine scribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum simplicium.

IAm verò ad subtrahendum lineam 2 *a* à linea 5 *a*, scribendum est 3 *a*: siquidem lineæ, quæ iisdem literis sunt designatæ, subducuntur, subtrahendo tantùm à se invicem numeros præfixos. Sic & si 2 *b* auferantur à 3 *b*, reliquum erit 1 *b* seu *b*. Similiter sublato *d* de 4 *d*, relinquitur 3 *d*: At *a* de *a* manet o seu nihil.

Quòd si verò lineæ diversis literis notatæ fuerint, subductio fiet interposito signo —, quod denotat minus. Vt si ab *a* subtrahenda sit *b*, scribo $a-b$, hoc est, *a* minus *b*, quo indicatur *b* esse sublatam ex *a*, vel adhuc esse subducendam. Vbi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, hoc est, quæ ex priori est subtrahenda.

Eodem modo, sublatis 4 *d* ex 3 *c*, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla subtractionis simplicium.

Ex	5 a.	3 b.	4 d.	a.	Ex.	a.	3 c.	a.	2 c.
subtr.	2 a.	2 b.	d.	a.	subtr.	b.	4 d.	4 b.	d.
reliq.	3. a.	b.	3 d.	o.	reliq.	$a-b.$	$3c-4d,$	$a-4b.$	$2c-d.$

Vnde notandum, in ejusmodi quantitatum subtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia subtrahi debet, esse minorem:

hoc est, ad subtrahendum b ex a, (ut in superiori exemplo) opùs esse, ut b sit minor quàm a. Quòd si autem non proponatur aut constet, utra quantitas sit major aut minor, & tamen subductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a \sim b$, hoc est, $a - b$ vel $b - a$.

De Multiplicatione quantitatum simplicium.

Porrò ad multiplicandum lineam a per lineam b, scribo ab vel ba. Sic & ad multiplicandum a per a, hoc est, a in se, scribo aa seu a^2: & aaa seu a^3 ad prædictum productum aa adhuc semel multiplicandum per a. Adeò ut literæ immediatè sese consequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam esse, indicent. Non secus, si multiplicare velim a, b & c per invicem, scribo abc, vel bac, vel cba &c: & abb seu ab^2 vel b^2a, ad multiplicandum a, b, & b. Hîc enim, ut in additione, non refert, quo ordine scribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in se, id quod producitur vocatur Quadratum ejusdem numeri, & si productum illud adhuc semel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipsius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque si a multiplicetur per a, productum aa seu a^2 appellari consuevit a quadratum, seu a duarum dimensionum; & si aa rursus multiplicetur per a, producetur aaa seu a^3, quod ideo appellari poterit a cubus, seu a trium dimensionum: atque ita a^4, a^5, a^6, &c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a surdesolidum, a quadrato-cubus, &c. seu, a habens 4, 5, aut 6, &c. dimensiones.

Sicuti autem numerus aliquis, si in se ducatur, dicitur radix quadrata istius producti seu quadrati: & si adhuc semel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus posterioris producti appellatur, &c; sic & a dicitur radix Quadrata ex aa seu a^2, & radix Cubica ex a^3, & radix Quadrato-Quadrata ex a^4, & radix Sursolida ex a^5, & radix Quadrato-Cubica ex a^6, atque ita porrò. Idem de reliquis est intelligendum.

Ex quibus constat diligenter esse notandum, quòd magnum sit discrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus est, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo est adscriptus. Vt inter $2a$ & a^2, $3a$ & a^3, $4a$ & a^4, &c. siquidem per

per $2a, 3a, 4a$, &c. simpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater, &c. sumpta, hoc est, a sibi ipsi toties addita: at verò per a^2, a^3, a^4, &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipsius a, hoc est, ipsa quantitas a toties posita & multiplicata.

Exempla multiplicationis simplicium.

Multipl. a.	a	aa	ab	ab	ab	aa	a^3.
per b.	a	a	c	b	cd	ab	a^3.
productum ab.	aa.	a^3.	abc.	abb.	$abcd$.	a^3b.	a^6.

Vbi notandum in a^3b, producto multiplicationis quantitatum aa & ab, numerum ternarium quantitatem præcedentem a respicere, non autem sequentem b: quod, cum brevitatis causâ scribatur pro $aaab$, in omnibus similibus casibus quoque est intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3, hoc est, aaa per a^3 seu aaa, producetur a^6, hoc est, $aaaaaa$.

Quòd si quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, sive integri sive fracti præfiguntur, oportebit dictos numeros in se invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exsurgit ex multiplicatione quantitatum dictarum. Vt ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3, provenit 6, quod si præfigatur ipsi ab, producto quantitatum a & b per invicem, erit quæsitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per c, productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hîc ipsi c præfigi subintelligitur, ducta in 2, producit 2.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum $3ab$, hoc est, ter ab per $2cd$, hoc est, bis cd, scribatur $6abcd$. Sic & , multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc est, semisse ipsius aa per tertiam partem ipsius ab, productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc est, $\frac{1}{6}aaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl. $2a$	$2b$	$\frac{1}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3$.
per $3b$	c	$\frac{1}{2}d$	$2cd$	$\frac{1}{3}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3$.
product. $6ab$.	$2bc$.	$\frac{1}{4}ad$.	$6abcd$.	$\frac{1}{6}a^3b$.	$3a^3b^3$.	$4a^6$.

Vbi tandem sciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimensionum seu literarum; earum

tamen additionem atque ſubtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Vt ad addendum $2ab$ ad $3ab$, ſcribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, ſcribitur $6ab + 2bc$. Non ſecus, ad ſubtrahendum $2ab$ de $3ab$, ſcribitur ab: & ad ſubtrahendum $2bc$ de $6ab$, ſcribitur $6ab - 2bc$, Et ſic de aliis.

De Diviſione quantitatum ſimplicium.

QVoniam verò diviſio reſolvit id, quod multiplicatio componit: facilè apparet, ad dividendam quantitatem ab ſeu ba per a, opùs tantùm eſſe ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a, quæ diviſor eſt, & pro quotiente ſcribere reliquam quantitatem b. Eodem modo, ſi dividatur aa per a, orietur a; & aaa ſeu a^3 per a, orietur aa.. Non ſecus diviſâ abc per a, fiet bc: at per b, fiet ac: & per c, fiet ab.

Quòd ſi verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri ſint præfixi; oportet, factâ diviſione quantitatum, ut jam oſtenſum eſt, ſimiliter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla diviſionis ſimplicium.

Divid. $\left.\begin{matrix} ab \\ a \end{matrix}\right\} b$ quot. $\left.\begin{matrix} aa \\ a \end{matrix}\right\} a.$ $\left.\begin{matrix} a^3 \\ a \end{matrix}\right\} aa.$ $\left.\begin{matrix} abc \\ a \end{matrix}\right\} bc.$ $\left.\begin{matrix} abc \\ ab \end{matrix}\right\} c.$ $\left.\begin{matrix} a^3b \\ ab \end{matrix}\right\} aa.$ $\left.\begin{matrix} a^5 \\ aa \end{matrix}\right\} a^3.$
per

Divid. $\left.\begin{matrix} 6ab \\ 2a \end{matrix}\right\} 3b.$ $\left.\begin{matrix} \frac{1}{6}a^3b \\ \frac{1}{3}ab \end{matrix}\right\} \frac{1}{2}aa.$ $\left.\begin{matrix} 3a^3b^3 \\ 3b^3 \end{matrix}\right\} 1a^3$ ſeu a^3. $\left.\begin{matrix} 3a^3b^3 \\ a^3 \end{matrix}\right\} 3b^3.$
per

Cùm autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ diviſoris præcedenti modo tolli nequeunt; ſubſcribitur Diviſor ipſi Dividendo interjectâ lineolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Vt ad dividendum ab per c, ſcribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab eſſe diviſam per c, vel adhuc eſſe dividendam. Sic & ad dividendum a per b, ſcribitur $\frac{a}{b}$. ſimiliter diviſâ abc per de, quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & ſic de aliis. Quæ quidem quantitates ſic diviſæ appellantur Fractiones.

Eſt verò hîc obiter notandum, diviſis a per a, $2b$ per $2b$, ſimilibuſve, quotientem eſſe 1: ſiquidem quævis quantitas ſe ipſam ſemel continet, ideoque per ſeipſam diviſa, unitatem profert.

DE

DE LOGISTICA QVANTITATVM COMPOSITARVM.

EXplicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & subtractione oriuntur quantitates, per signum + compositæ, aut per signum — disjunctæ, (quæ communiter generali nomine Compositæ dicuntur); consequens est, ut harum quoque operationem deinceps ostendamus.

De Additione quantitatum compositarum.

IGitur ad addendum quantitates Compositas, iisdem literis notatas, oportet considerare signa + & —, quibus afficiuntur, & notare, si eadem fuerint, additionem fieri ut in simplicibus, & earum summæ præfigi idem signum. Vt ad addendum $a + 3\,b$ ad $a + 2\,b$: additis a ad a, & $3\,b$ ad $2\,b$, summa erit $2\,a + 5\,b$. Eodem modo $2\,a - b$ additum ad $3\,a - 3\,b$, facit summam $5\,a - 4\,b$.

Quòd si verò signa diversa fuerint, subtrahendæ erunt quantitates eisdem literis denotatæ, sicut in subtractione simplicium, & ei quod relinquitur præfigendum est signum, quo major quantitas afficitur. Vt si addendum sit $3\,b + 5\,a$ ad $2\,b - 2\,a$: additis $3\,b$ ad $2\,b$, & subtractis $2\,a$ ex $5\,a$, summa erit $5\,b + 3\,a$. Similiter si $a + d$ addatur ad $a - 4\,d$, fiet summa $2\,a - 3\,d$. Vbi patet si $2\,b + a$ addatur ad $3\,b - a$, summam fore $5\,b$: quantitates enim $+ a$ & $- a$, cum propter diversa signa sint subtrahendæ, se mutuò tollunt.

Iam ad addendum quantitates diversis literis denotatas, oportet tantùm eas suis signis connectere. Vt ad addendum $a + b$ ad $c - d$, scribo $a + b + c - d$: siquidem quantitas c, & omnis alia cui nullum præponitur signum, intelligitur sibi præfixum habere signum +.

Exempla additionis compositarum.

Add.	$a + 3\,b$	$2\,a - b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb$	$a^3 - \frac{5}{4}abc$	$aa + 2\,a - 3.$
	$a + 2\,b$	$3\,a - 3\,b$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3 - \frac{3}{4}abc$	$aa + a - 6.$
summa	$2a + 5\,b.$	$5\,a - 4\,b.$	$ab + bb.$	$\frac{5}{3}a^3 - 2\,abc.$	$2aa + 3\,a - 9.$

Add.	$3b + 5a$	$a + d.$	$2b + a$	$aa - 2ab$	$3a^3 - \frac{1}{3}aab$	$aa - 5\,a + 6.$
	$2b - 2a$	$a - 4d.$	$3b - a$	$aa + ab$	$2a^3 + \frac{1}{2}aab$	$aa + a - 6.$
aggr.	$5b + 3a.$	$2a - 3d.$	$5b.$	$2aa - ab.$	$5a^3 + \frac{1}{6}aab.$	$2aa - 4a.$

Add.

Add.	$a+b$	$2aa+3ab-bb$	$3abc$	$a^3+2abb-aab+abc$.
Summa	$c-d$	$5ab-3aa$	a^3-abc	$a^3+aab-3abb-b^3$.
seu aggr.	$a+b+c-d$.	$8ab-aa-bb$.	a^3+2abc.	$2a^3-abb+abc-b^3$.

E quibus manifestum fit, (cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, scribi possit $3b+5a+2b-2a$, hoc est, $5b+3a$: siquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eisdem literis denotatas, quando diversa habent signa, subtrahendas esse, & summæ ascribendum esse signum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compositarum.

Porrò ad subtrahendum quantitates compositas, quæ eisdem literis sunt denotatæ, sciendum est: si signa eadem fuerint, & quantitas è qua subtractio fieri debet, major sit quantitate subducendâ; tum subtractionem fieri ut in simplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum esse idem signum. Vt si subtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (subtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$,) remanet $a+3b$. Non secus si subtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò signa eadem fuerint, & quantitas à qua subtractio fieri debet quantitate subducendâ minor sit; oportet, subtractâ minore ex majore, residuo signum contrarium præponere. Vt si subtrahendum sit $a+3b$ ab $3a+2b$: subtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, residuum erit $2a-b$. Similiter, sublatis $a-3b$ ex $2a-b$, relinquitur $a+2b$.

Quòd si quantitates iisdem literis designatæ, atque ad subtrahendum propositæ, diversa signa habeant; erunt ipsæ addendæ, ut in simplicibus, & summæ præfigendum signum quantitatis, à qua subductio fieri debet. Vt si velimus subtrahere $a-b$ ex $2a+b$: subtractis a ex $2a$, additisque b ad b, residuum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ subductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterùm ad subtrahendum quantitates diversis literis denotatas, oportet quantitates subducendas, variatis signis connectere cum iis, à quibus subductio fieri debet. Vt si subtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia seu residuum $a+b-c+d$: variatis nempe signis quantitatum c & d.

Exem-

Exempla subtractionis compositarum.

Ex	$2a+5b$	$5a-4b$	$\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}bb$	$a^3-\frac{5}{4}abc+abb-b^3$	$2aa+3a-9.$
Subtr.	$a+2b$	$3a-3b$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb$	$\frac{2}{3}a^3-\frac{3}{4}abc+abb-b^3$	$aa+2a-3.$
Reliq.	$a+3b$	$2a-b.$	$\frac{1}{4}ab+\frac{1}{3}bb.$	$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}abc.$	$aa+a-6.$
Ex	$3a+2b$	$2a-b$	$2aa-ab$	$5a^3+\frac{1}{6}aab-\frac{2}{3}abb$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a+3b$	$a-3b$	$aa-2ab$	$2a^3+\frac{1}{2}aab-abb$	$2aa-3a+9.$
Resid.	$2a-b.$	$a+2b.$	$aa+ab.$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{1}{3}abb.$	$aa+a-3.$
Ex	$2a+b$	$3a-2d$	$8ab-aa$	$3a^3-\frac{1}{3}aab+\frac{2}{3}abb-b^3$	$3aa-2a+6.$
Subtr.	$a-b$	$2a+5d$	$2aa-3ab$	$-2a^3+\frac{2}{3}aab$	$aa+a-3.$
Diff.	$a+2b.$	$a-7d.$	$11ab-3aa.$	$5a^3-aab+\frac{2}{3}abb-b^3.$	$2aa-3a+9.$
Ex		$a+b$	$2aa-4a$	$3abc$	$a^3+aab-abb-b^3.$
Subtr.		$c-d$	$aa+a-6$	a^3-abc	$aab-2a^3+c^3-abb.$
Rel. resid. seu diff.		$a+b-c+d.$	$aa-5a+6.$	$4abc-a^3.$	$3a^3-b^3-c^3.$

E quibus perspicuum fit (cum ad subtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ scribi possit $3a+2b-a-3b$, hoc est, $2a-b$, subtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$): quantitates eisdem literis denotatas, quando eadem habent signa, sed quantitates subducendæ aliis sunt majores, subtrahendas esse, & relicto præponendum esse signum contrarium.

Similiter quoniam ad subtrahendum $a-b$ ex $2a+b$, scribere possum $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$, (subtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eisdem literis designatæ, cùm diversa habuerint signa, sint addendæ, & summæ præfigendum sit signum ejus, à quâ subtractio fieri debet. Quòd autem subtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, scribendum sit $2a+b-a+b$, variatis nempe signis quantitatum subducendarum, inde manifestum fit; quòd ad subtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote subducendo quantitatem a, præponendo ei signum $-$, ut in subtractione simplicium est dictum: at quoniam subducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus justo tollitur, siquidem non a absolutè tollendum proponitur, sed diminuta quantitate b; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor sit quàm justa differentia, quantitate b: adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b, & scribere $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$. Et sic de aliis

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

POst hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmeticæ vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa $+$ & $-$ attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est $+$ per $+$, vel $-$ per $-$) facere signum $+$, diversa verò (hoc est $+$ per $-$, vel $-$ per $+$) facere $-$. Vt ad multiplicandum $a + b$ per c: multiplicatis $+ a$ per $+ c$, & $+ b$ per $+ c$, fiunt $+ ac$, & $+ bc$: quibus additis, fit productum $+ ac + bc$, seu $ac + bc$. Sic si multiplicandum sit $a - b$ per c, producetur $ac - bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a + b$ per $c + d$: multiplicatis enim $a + b$ per c, ut ante; & rursus $a + b$ per d (siquidem $a + b$ non tantùm per c, sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac + bc + ad + bd$. Non secus ad multiplicandum $a - b$ per $c - d$ scribitur $ac - ad - bc + bd$: multiplicatis nempe primùm $a - b$ per $+ c$, fit $+ ac - bc$: deinde $a - b$ per $- d$, fit $- ad + bd$. quippe $+ a$ per $- d$, producit $- ad$: at $- b$ per $- d$ producit $+ bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrum à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

Mult.	$a + b$	$a - b$	$a + b$	$a - b$	$a + b$
per	c	c	$c + d$	$c - d$	$a + b$
prod.	$ac + bc.$	$ac - cb.$	$ac + bc$	$ac - bc$	$+ ab + bb$
			$+ ad + bd$	$- ad + bd$	$aa + ab$
product.			$ac + bc + ad + bd.$	$ac - bc - ad + bd.$	$aa + 2ab + bb.$

Multipl.	$a - b$	$a + b$	$aa - 2ab + bb$	$aa - ab + bb$
per	$a - b$	$a - b$	$a - b$	$a + b$
	$- ab + bb$	$aa + ab$	$- aab + 2abb - b^3$	$+ aab - abb + b^3$
	$aa - ab$	$- ab - bb$	$a^3 - 2aab + abb$	$a^3 - aab + abb$
prod.	$aa - 2ab + bb.$	$aa - bb.$	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3.$	$a^3 + b^3.$

Mult.

Mult. $3dd + 4de + ee$ $\qquad$ $2a^3 + \frac{1}{2}aab + \frac{2}{3}abb$

per. $3dd - ee$ $\qquad$ $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{2}aa$

$9d^4 + 12d^3e + 3ddee$ $\qquad$ $-a^5 - \frac{1}{4}a^4b - \frac{1}{3}a^3bb$

$- 3ddee - 4de^3 - e^4$ $\qquad$ $+ \frac{4}{3}a^4b + \frac{1}{3}a^3bb + \frac{4}{9}aab^3$

product. $9d^4 + 12d^3e - 4de^3 - e^4.$ $\qquad$ $\frac{13}{12}a^4b + \frac{4}{9}aab^3 - a^5.$

Multipl. $4a^3 + 3aa - 2a + 1$

per $aa - 5a + 6$

$+ 24a^3 + 18aa - 12a + 6$

$- 20a^4 - 15a^3 + 10aa - 5a$

$+ 4a^5 + 3a^4 - 2a^3 + 1aa$

product. $4a^5 - 17a^4 + 7a^3 + 29aa - 17a + 6.$

Cæterùm advertendum hîc eſt, non rarò utile eſſe, multiplicationem hoc modo non inſtituere, ſed tantummodo eam innuere interſerendo voculam *in* vel M. Vt ad multiplicandum $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ per $\overline{aa - 5a + 6}$, ſcribo $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ in $\overline{aa - 5a + 6}$, vel $\overline{4a^3 + 3aa - 2a + 1}$ M $\overline{aa - 5a + 6}$.

Quòd autem + per −, vel − per + faciat −, ſic patet. Eſto $a - b$ multiplicandum per c, & ſit $a - b \propto e$: hinc ſi utrobique addatur b, fiet $a \propto b + e$. Iam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo ſi utrinque multiplicetur per c, erit $ac \propto bc + ec$, hoc eſt, auferendo utrinque bc, erit $ac - bc \propto ec$. Quocirca cum ſtatuatur $a - b \propto e$, & utrâque parte ductâ in c, producatur $ac - bc \propto ec$; perſpicuum fit, $-b$ ductum in $+c$, producere $-bc$.

Nec aliter oſtendetur − per − multiplicatum producere +. Etenim ſi $a - b$ multiplicandum ſit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \propto e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex e in $c - d$ vel $c - d$ in e: id eſt, $ce - de$. Sed ce, ut ſupra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porrò cum $a - b$ æqualis ſit poſita ipſi e, & utrâque parte ductâ in d, productum $ad - bd$ æquetur producto de: hinc ſi ex $ac - bc$ ſubtrahatur $ad - bd$ loco de, ei æquale; erit juxta regulam ſubtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum quæſitum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Divisione quantitatum compositarum.

PRæterea, ad dividendum quantitates compositas, operatio non absimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per se invicem dividuntur. Quod autem signa + & — concernit, sciendum est, si dividatur + per +, aut — per —, semper oriri +; at si + per —, vel — per + dividatur, semper oriri —. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem sive à dextra sive à sinistra incipias perinde erit. Vt ad dividendum $ac + bc$ per c: divisis $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, fiunt ut in simplicibus est ostensum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæsitus erit $a + b$. Similiter si dividatur $ac - cb$ per c, orietur $a - b$: divisis enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non dissimili ratione dividitur $ac + ad + bc + bd$ per $c + d$, & fit $a + b$. Cujus operatio talis est.

Divid.	$ac+ad+bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$	$+a.\ \frac{+bc}{+c}$	$+b.$
per $c+d$)	$\underline{ac+ad+bc+bd}$			
	o o o o			
Quotiens .	$+a+b.$			

Diviso ac per c, (ut in simplicibus) fit a, scribendum sub linea in quotiente. hinc multiplicato divisore $c + d$ per quotientem inventum a, productum $ac + ad$ ex dividendo auferatur, scribendo partes ejusdem denominationis sub invicem, & reliquum sub linea infra ductâ. Vnde cum subducto ac ex ac, & ad ex ad maneat nihil, scribitur sub linea ducta o. Deinde diviso $+bc$ per $+c$, fit $+b$, ascribendum priori quotienti. unde multiplicato divisore $c + d$ per hunc quotientem b, fit productum $+bc + bd$. id quod si scribatur, ut ante, sub dividendo, & fiat subductio; erit pro reliquo sub linea scribendum o. Et peracta erit divisio.

Eodem modo ad dividendum	$ac-ad-bc+bd$	$\frac{+ac}{+c}$	$+a$
per $c-d$:)	$\underline{ac-ad-bc+bd}$		
	o o o o	$\frac{+bc}{+c}$	$-b$
Erit quotiens	$+a-b.$		

Divido primùm ac per c, & fit a, scribendum sub linea in quotiente. Iam multiplicato divisore $c - d$ per $+a$, fit productum

ac—

$ac - ad$, ſubducendum ex dividendo, & relinquitur o. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, ſub linea ſcribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato diviſore $c-d$ per $-b$, fit productum $-bc+bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet diviſionem eſſe ad finem perductam, & quotientem eſſe $a-b$.

Sic etiam ad dividendum $aa-2ab+bb$

$$\begin{array}{rl} \text{per } a-b:)\ aa - & ab \\ \overline{o} - & \overline{ab} \\ - & ab+bb \\ & \overline{o} \quad \overline{o} \\ \text{fit quotiens} & \overline{a-b.} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Divido primùm aa per a, & oritur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a-b$ per a, & ablato producto $aa-ab$ ex dividendo, ſcribendum erit reliquum $-ab$ ſub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, ſcribendum ſub linea in quotiente. Tum ducto diviſore $a-b$ in $-b$, fit productum $-ab+bb$, quod ſublatum à reliquo dividendi relinquit o. Et erit operatio finita, ac quotiens quæſitus $a-b$.

Eâdem ratione ſi dividendum ſit $aa-bb$ per $a+b$.

$$\begin{array}{lr|l} \text{Divid.} & aa-bb & -ab \\ \text{Diviſ.}\ a+b) & \underline{aa-bb} & \underline{-ab} \\ & o \quad o & o \\ \text{Quotiens} & \overline{a-b} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa & a \\ a & \\ -ab & -b \\ +a & \end{array}$$

Incipiendo rurſus à primo termino, divido aa per a, & habebitur a, ſcribendum ſub linea in quotiente. Vnde multiplicato diviſore $a+b$ per quotientem inventum a, producetur $aa+ab$, quod ſublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hîc terminus præter ſuperſtitem $-bb$ ad dividendum huc acceſſit, ideo poſt lineam ei adſcribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum acceſſit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente ſub linea ſcribendum. Quo facto, ſi multiplicetur diviſor $a+b$ per hunc quotientem $-b$, exſurget $-ab-bb$ ad ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum poſt ſubtractio-

 nem

nem relinquat o; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiatur ab ultimo termino.

$$\begin{array}{lcccc}
 & & & & \\
\text{Dividend.} & a^3 + b^3 & - abb & + aab & \\
\text{Divisor } a + b) & + a^3 + b^3 & - abb & + aab & \\
 & 0 \quad 0 & 0 & 0 & \\
\text{Quotiens} & \multicolumn{3}{c}{+ aa - ab + bb.} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
b^3 & bb \\
b & \\
\hline
- abb & - ab \\
+ b & \\
\hline
+ aab & + aa \\
+ b &
\end{array}$$

Etenim diviso $+ b^3$ per $+ b$, fit $+ bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divisore $a + b$ in $+ bb$, producitur $+ abb + b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $- abb$. Deinde diviso $- abb$ per $+ b$, oritur $- ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per divisorem $a + b$ exsurgit $- aab - abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+ aab$. Denique diviso $+ aab$ per $+ b$, prodibit $+ aa$ scribendum in quotiente. unde si multiplicetur divisor $a + b$ per $+ aa$, & productum $+ a^3 + aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum o. Id quod ostendit, diviso $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem divisionis compositarum.

$$\begin{array}{ll}
\text{Dividend.} & a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
\text{Divisor } a - b.) & \qquad\qquad + abb - b^3 \\
 & \qquad\qquad + 2abb \quad 0 \\
 & \qquad - 2aab + 2abb \\
 & \qquad - aab \qquad 0 \\
 & a^3 - aab \\
 & - \\
 & 0 \quad 0 \\
\text{Quotiens} & + aa - 2ab + bb.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
- b^3 & + bb \\
- b & \\
\hline
+ 2abb & - 2ab \\
- b & \\
\hline
- aab & + aa \\
- b &
\end{array}$$

Divi-

$-e^4|+ee$

Dividend. $9d^4+12d^3e-4de^3-e^4|-3ddee$ $\quad -ee|$

Divis. $3dd-ee)9d^4+12d^3e-4de^3-e^4|-3ddee$ $\quad -3ddee|+3dd.$

o o o o o $\quad - ee|$

Quotiens $+4de+3dd+ee$ $\quad -4de^3|+4de.$

$-ee|$

Dividend. $\frac{13}{12}a^4b+\frac{4}{3}aab^3-a^5|-\frac{1}{3}a^3bb$ $\quad -a^5|+2a^3.$

Divis. $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{2}aa)+\frac{4}{3}a^4b+\frac{4}{3}aab^3-a^5|-\frac{1}{3}a^3bb$ $\quad -\frac{1}{2}aa|$

$-\frac{1}{4}a^4b$ o o o $\quad -\frac{1}{4}a^4b|+\frac{1}{2}aab.$

$-\frac{1}{4}a^4b$ $\quad -\frac{1}{2}aa|$

o $\quad -\frac{1}{3}a^3bb|+\frac{2}{3}abb.$

Quotiens $+\frac{2}{3}abb+\frac{1}{2}aab+2a^3.$ $\quad -\frac{1}{2}aa|$

Divid. $d^4-b^4+2aady+2aaby+aadd-aabb|-bd^3|+bbdd|-b^3d|-aabd$ Pag. 340. lin. 4.

Div. $d+b)d^4-b^4+2aady+2aaby+aadd-aabb|-bd^3|+bbdd|b^3d|-aabd$

o o o o o o o o o o

Quotiens $+d^3-bdd+bbd-b^3+2aay+aad-aab.$

$\frac{d^4}{d}|d^3.\ \frac{-bd^3}{+d}|-bdd.\ \frac{+bbdd}{+d}|+bbd.\ \frac{-b^3d}{+d}|-b^3.$

$\frac{+2aady}{+d}|+2aay.\ \frac{+aadd}{+d}|+aad.\ \frac{-aabd}{+d}|aab.$

Dividend. $+y^6-8y^4-124yy-64$ $\quad -64|+4$ Pag. 77.

Divisor $yy-16)+y^6+8y^4+4yy-64$ $\quad -16|$

$0-16y^4-128yy$ o $\quad -128yy|+8yy.$

$-16y^4-128yy$ $\quad -16|$

o o $\quad -16y^4|+1y^4.$

Quotiens $+1y^4+8yy+4.$ $\quad -16|$

Divi-

Dividend. $+y^6+aay^4-2ccy^4-a^4yy+c^4yy-a^6-2a^4cc-aac^4 \mid +2aaccyy$

Pag. 78. Div. $yy-aa-cc)$ $+y^6-aay^4-ccy^4-2a^4yy+c^4yy-a^6-a^4cc-aac^4 \mid +aaccyy$

$$0+2aay^4-ccy^4+a^4yy \quad 0 \quad 0-a^4cc \quad 0 \quad +aaccyy$$

$$+2aay^4-ccy+a^4yy \qquad -a^4cc \qquad +aaccyy$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

Quotiens $+y^4+2aayy-ccyy+a^4+aacc.$

$$\frac{+y^6}{+yy}\Big| +y^4. \quad \frac{+2aay^4}{+\quad yy}\Big| +2aayy. \quad \frac{-ccy^4}{+\quad yy}\Big| -ccyy.$$

$$\frac{+a^4yy}{+\quad yy}\Big| +a^4. \quad \frac{+aaccyy}{+\quad yy}\Big| +aacc.$$

Pag. 380. Dividend. $+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q \mid +ffuuq$

lin. 15. Div. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-ffuu+f^3uu)$ $\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^3uuq-fuuq-4f^4u^4q+4f^3u^4q \mid +ffuuq$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Quotiens $+q-4fuuq.$

$$\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}}\Big| +q. \quad \frac{-fuuq}{+\quad \frac{1}{4}}\Big| -4fuuq.$$

Quòd si quantitates dividendæ occurrant, quæ præcedenti modo dividi nequeunt, subscribendus erit divisor ipsi dividendo, interjectâ lineolâ, sicut in fractionibus vulgaribus. Vt ad dividendum $ad-ae$ per $d+e$, scribo pro quotiente $\frac{ad-ae}{d+e}$. quo indicatur $ad-ae$ divisum esse per $d+e$, vel adhuc esse dividendum. Sic & si $bb+bd+cc$ dividatur per $b+d$, fit quotiens seu fractio $\frac{bb+bd+cc}{b+d}$, hoc est, $b+\frac{cc}{b+d}$. Quippe sæpe conducit, ut in Arithmetica vulgari, divisionem, quantùm fieri potest, instituere, & quod superest instar fractionis quotienti adscribere. Et tantum de divisione.

DE EXTRACTIONE RADICIS.

QVoniam autem de Radicis Extractione, quæ pro divisionis specie haberi potest, agendum restat, sciendum est, ejus operationem non esse diversam ab illa, quâ in Arithmetica vulgari radix ex dato aliquo numero elicitur.

Etenim

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa, seu a quadratum, cujus radix seu latus dicitur a; sic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rursus a. Similiter cum aa, hoc est, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 seu cubum ex a; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3, fiet a. Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitatibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus simplicibus radicis extractio non secus se habet atque extractio radicis ex aliquo numero, quæ tantùm unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primùm radicem ex aa, & fit a, quæ in se multiplicata & ab aa ablata relinquit o. Deinde multiplicato a per 2, divido $+ 2ab$

Quadratum	$aa + 2ab + bb$
	$aa + 2ab + bb$
	o o o
Radix	$a + b$
Divisor	$2a$

per $2a$, & fit $+ b$: quod adscribo priori radici inventæ a. Hinc si ducatur $2a$ in b, fit $+ 2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit o. Similiter si multiplicetur b in se, fiet $+ bb$; quâ itidem ex $+ bb$ ablatâ, remanebit o. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quæsita $a + b$. Et sic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compositis.

Quadratum	$a^4 - 2aabb + b^4$
Radix	$aa - bb$
Divisor	$2aa$

Quadratum	$64xx - 160x + 100$
Radix	$8x - 10$
Divisor	$16x$

Quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$.
$aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$
o o o o o o

Radix $a + c - b$

Primus divisor $2a$

Secundus divisor $2a + 2c$

Quadratum aa $a + c$
Radix a per 2
$2a + 2c$. secundus divisor.

a a
per 2 a $-2ab \mid -b$ quot. secundus.
Primus divisor $2a$ aa $+2a \mid$
$+2ac \mid +c$ quotus primus $2a + 2c$
$+2a \mid$ $-b$
$-2ab - 2bc$.
$2a$ c $-b$
$+c$ c $-b$
$+2ac$ cc. $+bb$

Cubus $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$
Radix $a + b$ $+3aab \mid +b$.
Divisor $3aa$ $+3aa \mid$

Cub. $27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125$ Cub. $27x^6$
$27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3 + 60xx - 150x + 125$ Rad. $3xx$.
o $0 + 135x^4 - 180x^3 + 225xx$. o o $3xx$
$+135x^4 - 180x^3 + 225xx$ $3xx$
o o o $9x^4$.

Radix $3xx - 2x + 5$. per 3

Primus divis. $27x^4$ $-54x^5 \mid$ $27x^4$ 1. div.

Secundus divisor $27x^4 - 36x^3 + 12xx$ $+27x^4 \mid -2x$ quot. primus.

$-2x$

$$\begin{array}{llll} & -2x & -2x & 3xx-2x \\ +27x^4 & \underline{-2x} & \underline{-2x} & \underline{3xx-2x} \\ \underline{-2x} & +4xx & +4xx & -6x^3+4xx \\ -54x^5 & \underline{+3xx} & \underline{-2x} & \underline{9x^4-6x^3} \\ & +12x^4 & -8x^3. & 9x^4-12x^3+4xx \\ & \underline{\text{per } 3} & & \underline{\text{per } \quad 3} \\ & +36x^4. & & 27x^4-36x^3+12xx.\ \text{Secund. div.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & +5 & +5 \\ +135x^4 \mid +5\ \text{quotus secund.} & \underline{+5} & \underline{+5} \\ +\ 27x^4 \mid & +25 & +25 \\ & \underline{+3xx-2x} & \underline{+\ 5}. \\ +27x^4-36x^3+12xx & +75xx-50x & +125. \\ \underline{\qquad\qquad +\quad 5} & \underline{\text{per } 3} & \\ +135x^4-180x^3+60xx. & +225xx-150x. & \end{array}$$

Cæterùm si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitatibus propositis signum $\surd$. Vt ad extrahendum radicem quadratam ex aq, scribo $\surd\, aq$; quo indicatur radicem quadratam ex aq esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\surd\, \overline{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq, scribo $\surd\, C.aaq$. Vt & $\surd\, \overline{C.a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb. Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Vbi notandum, signum $\surd$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quamcunque radicem, sive Quadratam, sive Cubicam, sive Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi $\surd\, Q$, vel etiam simpliciter $\surd$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\surd\, C$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\surd\, QQ$ seu $\surd\surd$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam sic designantur: $\surd$ ②, $\surd$ ③, $\surd$ ④, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\surd$ ʒ, $\surd$ ꝙ, $\surd$ ʒʒ, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

QVandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractorum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur, facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Vt $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Vnde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quòd si verò ab, $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velimus, oportet tantùm, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porrò si quantitas aliqua, ut a, designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d, aut $a+b$, &c; oportet multiplicato a per d, aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d, addatur producto ad numerator aa, & summæ $ad+aa$ subscribatur denominator d, habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic &, $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b$ $\frac{+aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterùm notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb, scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb, pro pro-

producto ſcribendum eſſe numeratorem aa. Non ſecus ſi $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb. Vnde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum eſt a; ſupereſt tantùm ut hoc productum adhuc multiplicetur per a, ut habeatur quæſitum productum aa. Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2, fiat 1; hinc multiplicandum tantùm reſtat 1 per ab, & fit productum quæſitum $1ab$ ſeu ab. Et ſic de aliis.

De Reductione fractionum ad ſimpliciores.

IAm ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad ſimpliciorem; eliſâ communi literâ c, quæ tam in numeratore quàm in denominatore reperitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{ab^3}{abc}$: eliſis literis a, b, numeratoris atque denominatoris, hoc eſt, diviſo tam ab^3 quàm abc per ab, fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviſo aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut ſupra) diviſo aac per cd, oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rurſus $-bbc$ diviſo per cd, oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Sic & $\frac{a^5 ccoomm + 4a^5 ccm^3 p}{oopp z^4 + 4mp^3 z^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^5 ccmm}{pp z^4}$. Pag. 214. lin. 15.

Non ſecus $\frac{aac-aad-acd+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

$\frac{aa-ad}{d}$. Nam $aac-aad$ divisum per $cd-dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd+add$ divisum per $cd-dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: divido a^3-abb per $aa+2ab+bb$, & relinquitur post divisionem $+2abb+2b^3$ (nullâ hîc quotientis $a-2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa+2ab+bb$ per reliquum $+2abb+2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb}+\frac{1}{2b}$. Hinc cum peracta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator a^3-abb & denominator $aa+2ab+bb$ per $2abb+2b^3$. Invenieturque $\frac{aa}{2bb}-\frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb}+\frac{1}{2b}$, pro denominatore.

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3-b^3}{aa-bb}$. Divisis enim a^3-b^3 per $aa-bb$, relinquitur $abb-b^3$: dein $aa-bb$ per $abb-b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb}+\frac{1}{b}$, & peracta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur a^3-b^3 & $aa-bb$ per $abb-b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb}+\frac{a}{b}+1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb}+\frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per bb, fiet fractio reducta $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4-b^4}{aa+ab}$ ad $\frac{a^3-aab+abb-b^3}{a}$: Vt & $\frac{x^3-25x}{xx+10x+25}$ ad $\frac{xx-5x}{x+5}$. Et sic de aliis.

Ostensâ igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, sive simplicibus, sive compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest. id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundùm prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Vt,

Vt, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas aac & cd: conſtitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, ſeu ſimpliciorem $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta ſe poſitis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d, atque ex cd in aa: fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ ſine reliquo dividi poteſt per aac & cd.

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d, aut $cd - dd$ per aa, fiet quantitas quæſita $aacd - aadd$. minima ſcilicet, quæ diviſibilis eſt per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter ſi dentur $a^4 - b^4$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$, & $a^4 - b^4$ multiplicatum per a facit $a^5 - ab^4$; erit $a^5 - ab^4$ quantitas quæſita.

Eâdem ratione ſi datæ fuerint $x^3 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæſita quantitas $x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x$. Et ſic de cæteris.

Quòd ſi verò compertum ſit aut conſtet, duas illas datas quantitates ad ſimpliciores reduci non poſſe, ſed primitivas eſſe; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæſitam. Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad ſimpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum ſecundùm præcedentia ſcribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæſita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterùm datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipſas abſque reliquo dividi poteſt, hoc modo: Vt ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primùm, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi poteſt per

$a^3 -$

$a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$. quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifestum est $a^4 + a^3b - aabb - ab^1$ esse quantitatem quæsitam. Sic & si datæ fuerint $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primùm minimâ quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi potest per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$, (ut ante), quoniam ipsa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ similiter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$. quæ cum hîc etiam divisibilis sit per reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$ esse quantitatem quæsitam. Et sic de cæteris.

De Reductione fractionum ad eandem denominationem.

QVibus explicatis, facile est ostendere, quâ ratione fractiones diversæ denominationis reducantur ad fractiones ejusdem denominationis. Vt ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad eandem denominationem: quæro primùm minimam quantitatem, quæ dividi potest per denominatores aac & cd (ut jam est ostensum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Iam ad inveniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$ per aac & cd, unumquemque scilicet ex denominatoribus datis, & quotientis d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæsiti b^3dd & a^5, fiuntque fractiones quæsitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem denominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$, minimâ nempe quantitate, quæ dividi potest per $aac - aad$ & $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, & quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiuntque fractiones quæsitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo si $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad eandem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ & $\frac{x^3 - 50xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non secus $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$ reductæ sub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^8 - a^7 b + a^6 bb}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6},$$
$$\frac{a^8 - 3a^7 b + 5a^6 bb - 6a^5 b^3 + 5a^4 b^4 - 3a^3 b^5 + aab^6}{a^6 - a^5 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6},$$
$$\frac{a^8 - a^7 b + a^6 bb - a^5 b^3 - a^3 b^5 + aab^6 - ab^7 + b^8}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}, \&$$
$$\frac{a^8 - a^7 b + 2a^6 bb - 2a^5 b^3 + 2a^4 b^4 - 2a^3 b^5 + aab^6 - ab^7}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

Additio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur, atque additio & subtractio numerorum fractorum vulgarium. Etenim si fractiones ejusdem fuerint denominationis, oportet tantùm earum numeratores addere aut subtrahere, & summæ vel reliquo subscribere denominatorem communem. Vt ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, summa erit $\frac{aa + bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d + e}$ additum ad $\frac{2ae}{d + e}$, facit $\frac{2ad + 2ae}{d + e}$, seu $2a$. Non secus si addantur $\frac{bd}{b + d}$, $d + \frac{bb}{b + d}$, & $a - \frac{dd}{b + d}$, erit summa $a + \frac{2bd + bb}{b + d}$.

Quod si fractiones diversæ denominationis fuerint, reducendæ erunt priùs ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum est. Vt ad addendum $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ad $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, fiet summa $\frac{x^3 - 30xx + 250x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non secus si addantur $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$, $\frac{a^3 - aab}{aa + ab}$, $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + ab^3}$, & $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$, erit summa $\frac{4a^8 - 6a^7 b + 9a^6 bb - 9a^5 b^3 + 7a^4 b^4 - 6a^3 b^5 + 3aab^6 - 2ab^7 + b^8}{a^7 - a^6 b + a^5 bb - a^3 b^4 + aab^5 - ab^6}$,

Iam ad subtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, scribo pro differentia $\frac{bb - aa}{c}$. Eodem modo subductis $\frac{2ae}{d - e}$ à $\frac{2ad}{d - e}$, reliquum erit $\frac{2ad - 2ae}{d - e}$ seu $2a$ Similiter $\frac{bd}{b + d}$ de $d + \frac{bd}{b + d}$ relinquit $\frac{dd + bb}{b + d}$.

Nec aliter fit, si subtrahendum sit $\frac{b^4}{aac - aad}$ de $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b^4 d}{aacd - aadd}$ de $\frac{a^5 + aab^3}{aacd - aadd}$ relinquetur $\frac{a^5 + aab^3 - b^4 d}{aacd - aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3 - 25x}$ ex $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$, remanebit $\frac{x^3 - 30xx - 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa - ab}{a + b}$ de a, reductâ quantitate a ad denominatorem $a + b$, demptoque $\frac{aa - ab}{a + b}$ de $\frac{aa + ab}{a + b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a + b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b + d}$ de $a + b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b + d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de, ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa - bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b + c}$ producit $\frac{2a^3 b - 2ab^3}{bc + cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non rarò convenit abbreviare quantitates per crucem. Vt ad multiplicandum $\frac{aac - aad - bbc + bbd}{aa + 2ab + bb}$ per $\frac{a^3 - abb}{cd - dd}$: quoniam $aac - aad - bbc + bbd$ & $cd - dd$ reducuntur ad simpliciores $aa - bb$ & d, ut & $a^3 - abb$ & $aa + 2ab + bb$ ad $aa - ab$ & $a + b$; hinc loco multiplicandi $aac - aad - bbc + bbd$ per $a^3 - abb$ multiplico $aa - bb$ per $aa - ab$; & loco multiplicandi $aa + 2ab + bb$ per $cd - dd$ multiplico $a + b$ per d: eritque productum $\frac{a^4 - a^3 b - aabb + ab^3}{ad + bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa - bb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa - bb$, quoniam numerator $aa - bb$ & denominator $a + b$ reduci possunt ad $a - b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3 - 2aab + abb}{1}$ seu $a^3 - 2aab + abb$.

Eâdem ratione cùm multiplicatur $a + \frac{bb}{a - b}$ per $a - 2b + \frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa - ab + bb}{a - b}$ per $\frac{aa - 2ab + bb}{a}$: quoniam $aa - 2ab + bb$ & $a -$

& $a-b$ reduci poſſunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$ ſeu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter ſi ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & 1, multiplico tantùm $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb; hinc productum quæſitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producetur $a^3-2aab+abb$. cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, ſupereſt tantùm multiplicandum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique ſi multiplicandum ſit $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$ per $c-d$, fiet, diviſis $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{a}$.

De Diviſione fractionum.

AD dividendum $\frac{ab^3}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omiſſo communi denominatore c, divido ab^3 per bb, fietque quotiens ab. Pari ratione ſi $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ ſeu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quòd ſi denominatores fuerint diverſi, reductio ad eandem denominationem fiet, ſi multiplicatio inſtituatur per crucem, ut in vulgaribus. Vt ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore a^3-b^3 per poſterioris denominatorem c, & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt a^3c-b^3c & a^3+b^3; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

Advertendum autem hîc est, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, sicut etiam denominatores non rarò ad simpliciores terminos reduci posse. Vt ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$ per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci possint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a, & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^3 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens divisionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eâdem ratione si $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci possunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x, quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci possunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + 4b}$ per $a + b$, hoc est, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + 4b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæsitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + 4b}$. Haud aliter, si dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exsurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

CVm in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quæsitam: hinc si extrahenda sit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix quadrata ex $aabb$ eſt ab, & radix quadrata ex cc eſt c, ſcribo pro radice quæſita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, ſi extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$, fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ eſt $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 eſt 5; erit radix quæſita $\frac{10 - 8x}{5}$ ſeu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non ſecus radix cubica ex $\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quòd ſi quæſita radix prædicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, præponitur datæ fractioni ſignum radicale $\sqrt{}$. Vt ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, ſcribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi poteſt radix, quæ eſt $2b$: ideo quæſita radix ſic quoque ſcribi poterit $\frac{\sqrt{ccxx - 4abbc}}{2b}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\frac{ab}{\sqrt{aa + bb}}$. Idem de reliquis radicibus eſt intelligendum.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SVRDARVM.

QVemadmodum fractiones oriuntur ex diviſione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram ſine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radicis quantitatum radicem non habentium exſurgunt quantitates Surdæ, quarum operationem ſequentibus exemplis exponere viſum fuit.

De Reductione quantitatum ſurdarum.

SCiendum itaque, quòd, ſicut ad operationem fractionum diverſæ denominationis oportet priùs ipſas ad eundem denomi-

 nato-

natorem reducere, ita & opùs sit, quantitates surdas, si diversa signa radicalia habuerint, reducere ad idem signum radicale. Quod fit, si ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniatur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividi possit. Vt ad reducendum $\sqrt{aq}$ seu $\sqrt{\textcircled{2}}\,aq$ & $\sqrt{C.aaq}$ seu $\sqrt{\textcircled{1}}\,aaq$ ad idem signum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{Q}$ & $\sqrt{C}$ denominantur) minimum numerum, qui per ipsos sine reliquo dividi potest, qui est 6. Iam cum 6 diviso per 2 oriatur 3, & per 3 diviso oriatur 2; hinc aq multiplicandum erit in se cubicè, & aaq quadratè; fientque sub eodem signo $\sqrt{QC.a^3q^3}$ seu $\sqrt{\textcircled{6}}\,a^3q^3$, & $\sqrt{QC.a^4qq}$ seu $\sqrt{\textcircled{6}}\,a^4qq$. Sic & $\sqrt{ab}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$ sub eodem signo radicali erunt $\sqrt{\sqrt{aabb}}$ & $\sqrt{\sqrt{a^3b+ab^3}}$.

Huc refer cùm quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in se reducitur ad aliquod signum radicale. Exempli gratiâ: ad reducendum $a+b$ ad idem signum radicis cum $\sqrt{aa+bb}$ oportet multiplicare $a+b$ in se quadratè, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$. Non secus si multiplicetur $a+b$ in se cubicè, fiet $\sqrt{C.a^3+3aab+3abb+b^3}$ sub eodem signo cum $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$. Et sic de aliis.

Deinde sciendum, quantitates surdas non rarò ad simpliciores reduci posse, tollendo ex signo radicali quicquid est rationale: nimirum, dividendo quantitates sub eodem signo $\sqrt{}$ comprehensas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Vt $\sqrt{75aa}$ reduci potest ad $5a\sqrt{3}$: nam $75aa$ producitur ex multiplicatione $25aa$ per 3, quarum radices sunt $5a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, si $75aa$ dividatur per quadratum $25aa$, sub signo radicali tantùm scribendùm sit 3, hoc modo: $5a\sqrt{3}$. Id quod monstrat $5a$, hoc est, $\sqrt{25aa}$, multiplicatum esse per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3b+aabb$ dividi possit per quadratum aa, & oriatur $ab+bb$; fit ut pro $\sqrt{a^3b+aabb}$ scribi queat $a\sqrt{ab+bb}$.

Similiter quoniam $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$ dividi potest per quadratum $aa+2ac+cc-2ab-2bc+bb$, cujus radix est $a+c-b$, & quotiens est $ab+bb$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ ſcribi poteſt $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$.

Non ſecus pro $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$ ſcribi poterit $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$: *Pag. 31. lin. 9.* reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum priori, poteſt utriuſque numerator dividi per $aamm$, cujus radix eſt am, oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum ſit rationalis, liberabitur à ſigno $\sqrt{}$, extrahendo radicem ex $ppzz$.

Eâdem ratione loco

$\sqrt{C.\, x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$

ſcribi poteſt $x - 3\sqrt{C.\, x^3 + 12}$. Et ſic de aliis.

Verùm enimverò quoniam ſæpenumero difficile eſt invenire Quadratum, Cubum, &c. per quod diviſio, ad hanc reductionem neceſſaria, inſtitui poſſit; non inutile fuerit, ſi hoc loco oſtendamus, quâ ratione datarum quarumlibet quantitatum diviſores omnes inveniantur, perinde atque in numeris eſt oſtenſum. vide p. 300.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primitivam (hoc eſt, quæ non niſi per unitatem aut ſe ipſam dividi poteſt), & rurſus quotiens per hanc eandem ſive aliam primitivam, idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam, quæ per ſe ipſam eſt dividenda. Vt ad inveniendum diviſores omnes quantitatis $a^3b + aabb$: divido $a^3b + aabb$ per a, & fit $aab + abb$, id quod rurſus per a diviſum dat $ab + bb$. Iam quia quotiens hîc per a ampliùs dividi nequit, divido $ab + bb$ per b, & provenit $a + b$, quæ quantitas eſt primitiva, ideoque per ſe ipſam dividenda. Quibus peractis reſervantur diviſores a, a, b, & $a + b$. *Ratio inveniendi diviſores omnes quarumcunque datarum quantitatum.*

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^3b + aabb & aab + abb & ab + bb & a + b & 1 \\ a & a & b & a + b & \end{array}$$

Iam ut ex hiſce diviſoribus inveniantur diviſores omnes quantitatis $a^3b + aabb$, multiplico primùm a per a, & fit aa. Deinde b per 1, a, & aa, fiuntque b, ab, & aab. Denique multiplico $a + b$ per 1, a, aa, b, ab, & aab, & fiunt $a + b$, $aa + ab$, $a^3 + aab$, $ab + bb$, $aab + abb$, & $a^3b + aabb$.

I.

$$1.$$
$$a. \quad a.$$
$$aa.$$
$$b. \quad ab. \quad aab.$$
$$a+b \;\; aa+ab.\, a^3+aab.\, ab+bb.\, aab+abb.\, a^3b+aabb.$$

Atque ita divisores omnes erunt $1, a, aa, b, ab, aab, a+b, aa+ab, a^3+aab, ab+bb, aab+abb$, & $a^3b+aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: divido $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$ per quantitatem primitivam $aa+bb$, & fit $a^4-3aabb+b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa+ab-bb$ dat $aa-ab-bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per seipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $aa-ab-bb$.

$a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$	$a^4-3aabb+b^4$	$aa-ab-bb$	1
$aa+bb$	$aa+ab-bb$	$aa-ab-bb$	

Ex quibus ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$: multiplico primùm $aa+bb$ per $aa+ab-bb$, & fit $a^4+a^3b+ab^3-b^4$. Deinde 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, & $a^4+a^3b+ab^3$ per $aa-ab-ab-bb$, fiuntque $aa-ab-bb$, $a^4-a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

$$1.$$
$$aa+bb. \quad aa+ab-bb.$$
$$a^4+a^3b+ab^3-b^4.$$
$$aa-ab-bb.\, a^4-a^3b-ab^3-b^4.\, a^4-3aabb+b^4.\, a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6.$$

Ita ut divisores omnes sint 1, $aa+bb$, $aa+ab-bb$, $a^4+a^3b+ab^3-b^4$, $aa-ab-bb$, $a^4\,a^3b-ab^3-b^4$, $a^4-3aabb+b^4$, & $a^6-2a^4bb-2aab^4+b^6$.

Pag. 78, lin. 12. Eodem modo ut inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aac^4$: divido $a^6+2a^4cc+aac^4$ per a, & fit $a^5+2a^3cc+ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4+2aacc+c^4$. Iam cum hic quotiens dividi ampliùs non possit per a aut c similemve quantitatem, divido $a^4+2aacc+c^4$ per $aa+cc$, vel, quod hic idem est, ex $a^4+2aacc+c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa + cc$, quâ denuo per seipsam divisâ, provenit 1. Vnde cum divisores reservati sint a, a, $aa + cc$, & $aa + cc$; ideo ut ex iis inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6 + 2a^4cc + aac^4$: multiplico primùm a per a, & fit aa: deinde 1, a, & aa per $aa + cc$, fiuntque $aa + cc$, $a^3 + acc$, & $a^4 + aacc$: ac denique $aa + cc$, $a^3 + acc$, & $a^4 + aacc$ per $aa + cc$, & fiunt $a^4 + 2aacc + c^4$, $a^5 + 2a^3cc + ac^4$, & $a^6 + 2a^4cc + aac^4$; eruntque divisores omnes 1, a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, $a^4 + aacc$, $a^4 + 2aacc + c^4$, $a^5 + 2a^3cc + ac^4$, & $a^6 + 2a^4cc + aac^4$.

$a^6 + 2a^4cc + aac^4$	$a^5 + 2a^3cc + ac^4$	$a^4 + 2aacc + c^4$	$aa + cc$	1
a	a	$aa + cc$	$aa + cc$	

1.

a. a.

aa.

$aa + cc$. $a^3 + acc$. $a^4 + aacc$.

$aa + cc$. $a^4 + 2aacc + c^4$. $a^5 + 2a^3cc + ac^4$. $a^6 + 2a^4cc + aac^4$.

Similiter ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$: quia, factâ divisione per b, oritur $a^3 - aab + 2aac + acc - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & hujus quotientis per $a + b$, oritur $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, & radix quadrata ex $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$ est $a + c - b$, hoc est, $aa - 2ab - 2ac - 2bc + cc + bb$ divisum per $a + c - b$, dat $a + c - b$; divido demum $a + c - b$ per $a + c - b$, & fit 1. Vnde cum divisores reservati sint b, $a + b$, $a + c - b$, & $a + c - b$; multiplico b per $a + b$, & fit $ab + bb$: tum 1, b, $a + b$, & $ab + bb$ per $a + c - b$, fiuntque $a + c - b$, $ab + bc - bb$, $aa + ac + bc - bb$, & $aab + abc + bbc - b^3$: ac denique $a + c - b$, $ab + bc - bb$, $aa + ac + bc - bb$, & $aab + abc + bbc - b^3$ per $a + c - b$, fiuntque $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, $aab + 2abc + bcc - 2abb - 2bbc + b^3$, $a^3 + 2aac + acc - aab - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & $a^3b + aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$. Atque ita divisores omnes erunt 1, b, $a + b$, $ab + bb$, $a + c - b$, $ab + bc - bb$, $aa + ac + bc - bb$, $aab + abc + bbc - b^3$, $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, $aab + 2abc + bcc - 2abb - 2bbc + b^3$, $a^3 + 2aac$

$+acc-aab-abb+bcc-2bbc+b^3$, & $a^3b-aabb+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$.

Non secus si proponatur a^3bc-ab^3c, invenientur ex divisoribus reservatis $a, b, c, a-b$, & $a+b$ divisores sequentes: $1, a, b, ab, c, ac, bc, abc, a-b, aa-ab, ab-bb, aab-abb, ac+bc, aac-abc, abc-bbc, aabc-abbc, a+b, aa+ab, ab+bb, aab+abb, ac+bc, aac+abc, abc+bbc, aabc+abbc, aa-bb, a^3-abb, aab-b^3, a^3b-ab^3, aac-bbc, a^3c-abbc, aabc-b^3c$, & a^3bc-ab^3c.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum divisorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex superioribus facilè fuit colligere, ad simplicissimos terminos reduci queant. Vt ad reducendum $a^3-abb, aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ ad terminos simplicissimos, eandem cum ipsis rationem habentes; quæro primo (ut ante) omnes cujusque quantitatis datæ divisores: eruntque ipsius a^3-abb divisores $1, a, a-b, aa-ab, a+b, aa+ab, aa-bb$, & a^3-abb: ipsius autem $aab-b^3$ divisores erunt $1, b, a-b, ab-bb, a+b, ab+bb, aa-bb$, & $aab-b^3$: at verò ipsius $a^3+aab-abb-b^3$ divisores erunt $1, a-b, a+b, aa-bb, aa+2ab+bb$, & $a^3+aab-abb-b^3$. Iam cum inter ipsos tres sint, qui sibi invicem respondeant, ut $a-b, a+b$, & $aa-bb$, quorum ope datæ quantitates ad simpliciores reduci possunt; hinc ad inveniendum terminos simplicissimos, divido $a^3-abb, aab, aab-b^3$, & $a^3+aab-abb-b^3$ per $aa-bb$ (utpote divisorem pluribus dimensionibus constantem), fiuntque a, b, & $a+b$. Vbi notandum, quantitates propositas fore inter se primas, si nulli ex divisoribus sibi mutuò respondeant.

Quæ ratio inveniendi divisores non ineptè quoque adhiberi potest ad fractionum abbreviationem. Vt ad abbreviandum $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$: quia tam numerator quàm denominator dividi potest per $a+b$, poterit pro $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ scribi $\frac{aa-ab}{a+b}$. Et sic de cæteris.

Vide supra pag. 22.

Inventis autem omnibus divisoribus, videndum est num aliqui ex ipsis sint quadrati, vel cubi, &c. qui si reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex signo radicali.

dicali. Vt quia inter divisores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum aa, poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$, dividendo per aa, reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro divisore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro $\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi $\overline{a + c - b}\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter divisores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi potest per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ scribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quòd si inter divisores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperiatur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, nisi velis eam in formam fractionis designare. Vt quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{5}{2}}$, vel $5a\sqrt{\frac{2}{5}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{10}}$, &c.

Sciendum denique, quòd, licèt hæ quantitates omnes per se consideratæ surdæ existant, tamen inter se collatæ duorum sint generum: aliæ enim dicuntur Commensurabiles seu Communicantes; aliæ verò Incommensurabiles seu non Communicantes.

Communicantes sunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter se sunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu sicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò sunt, quarum unius ad alteram relatio non est ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoscendi communicantes à non communicantibus est, si, postquam ad simplicissimos terminos sunt reductæ, reperiantur inter se esse ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Vt $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt communicantes, quia divisione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

 mu-

munem divisorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa}$ & $\sqrt{9aa}$, hoc est, ad $5a$ & $3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ scribi possit $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, quæ inter se sunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3.

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa}$ & $\sqrt{bb}$, seu a & b: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter se sunt ut a ad b.

Pag. 31. Similiter communicantes sunt $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio est, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{pz}$, seu pzz ad aam.

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, habent inter se eam rationem, quæ est ipsius $x+3$ ad $5-x$. Et sic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum surdarum.

AD addendum vel subtrahendum quantitates surdas, oportet primùm explorare utrum sint communicantes nec ne: si enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel subtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra signum radicale reperiuntur. Ut ad addendum $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ & $3a\sqrt{3}$, scribo, additis $5a$ & $3a$, pro summa $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro earundem differentia, utpote sublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo si fuerint $\sqrt{a^4+aabb}$ & $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$: addendo & subtrahendo a & b, erit summa $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$, & differentia $\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter si proponatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$ & $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$, hoc est, $\frac{z}{a}\sqrt{oo+4mp}$ & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo+4mp}$, erit summa $\frac{pzz+aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$, & dif-

& differentia $\frac{pzz \sim aam}{apz}\sqrt{oo+4mp}$. Nec aliter fit si habeatur $\sqrt{\frac{4aabb-4aaxx}{bb}}$ vel $\frac{2a}{b}\sqrt{bb-xx}$ & $\sqrt{bb-xx}$: erit enim summa $\frac{2a+b}{b}\sqrt{bb-xx}$, & differentia $\frac{2a \sim b}{b}\sqrt{bb-xx}$. Pari ratione additis $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ & $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$ & $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$, erit summa $8\sqrt{xx+12}$, eisdemque subtractis, erit differentia $\overline{2x \sim 2}\sqrt{xx+12}$. Pag. 173, lin. 18.

Quòd si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi vel subtrahi ita ut unam radicem constituant, quocirca addendæ vel subtrahendæ sunt mediantibus signis $+$ & $-$. unde Binomia & Multinomia exsurgunt. Vt si addendum sit $\sqrt{aa+bb}$ ad $\sqrt{aa-bb}$, scribo pro summa $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$; & ad subtrahendum $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, scribo pro reliquo $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Non secus si addatur $a+b$ ad $\sqrt{aa+bb}$, erit summa $a+b+\sqrt{aa+bb}$; at si subducatur $\sqrt{aa+bb}$ de $a+b$, erit reliquum $a+b-\sqrt{aa+bb}$. Cum enim $a+b$ sit quantitas rationalis, & $\sqrt{aa+bb}$ quantitas surda, non magis communicantes esse possunt, quàm omnes quantitates surdæ, quæ diversis signis radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes summam ex $aa+bb+a\sqrt{aa+bb}$ & $aa-bb-b\sqrt{aa+bb}$ esse $2aa+\overline{a-b}\sqrt{aa+bb}$, & differentiam esse $2bb+\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$.

De Multiplicatione quantitatum surdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplicatis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis, productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Vt ad multiplicandum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$, multiplico primùm $5a$ per $3a$, & fit $15aa$: tum $15aa$ per 3, eritque productum quæsitum $45aa$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: multiplicato a per b, &

producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæsitum a^3b+ab^3. Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur
$\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per
$\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, per $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd si datæ quantitates non fuerint communicantes, oportet tantùm multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda priùs sunt ad idem signum, sicut superiùs est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Vt, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$: multiplicatis ab per cd, præfigatur producto $abcd$ signum $\sqrt{}$, & fit productum quæsitum $\sqrt{abcd}$. Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco priùs $a+b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $\overline{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$ in se: multiplico primùm $a+\sqrt{bc}$, per a, & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$, fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta si addantur, fiet productum quæsitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omissis scilicet tantùm signis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evanescunt: hinc productum quæsitum erit $2bb$.

De Divisione quantitatum surdarum.

Si datæ quantitates sunt communicantes, oportet tantùm dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos, & quod

& quod oritur erit quotiens quæſitus. Vt ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc eſt, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, ſeu 5 per 3; eritque quotiens quæſitus $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^4+aabb}$ per $\sqrt{aabb+b^4}$, hoc eſt, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: diviſis a per b, fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non ſecus $\sqrt{abcc}$ ſeu $c\sqrt{ab}$ diviſum per $\sqrt{ab}$ dat c. Et ſic de aliis.

Quòd ſi communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ, & ei quod oritur præfigendum eſt commune ſignum radicale. Vt ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: diviſis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab; unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{ab}$.

Et quidem ſi ſigna radicalia fuerint diverſa, reducenda priùs erunt ad idem ſignum, & deinde operatio inſtituenda erit, ut jam dictum eſt. Vt ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^4+aabb}$: multiplicando a^3+abb in ſe, fit $a^6+2a^4bb+aab^4$; quare diviſâ $\sqrt{a^6+2a^4bb+aab^4}$ per $\sqrt{a^4+aabb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}$ per $a+b$: multiplico primùm $a+b$ in ſe, ut fiat ſub eodem ſigno radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2a^3b-b^4}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæſitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ diviſum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$. quippe diviſo quadrato per ſuum latus, oritur latus. Vnde ſi a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porrò ſi dividendum ſit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primùm a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b, unde quotiens quæſitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non ſecus ſi dividatur $\sqrt{a^4+2a^3b-2ab^3-b^4}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter ſi dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab diviſâ per a, eadem exoritur quantitas b, quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per $\sqrt{bc}$: hinc quotiens quæſitus erit b. Eodem modo $aab-bbc-ab+\frac{bbc}{a}\sqrt{bc}$ diviſum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{bbc}{a}$.

Poſtea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a, & fit

& fit a, quod multiplicatum per $\sqrt{bc}$ producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc}-bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a, fit $\sqrt{bc}$, quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur o, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quæsitus $a-\sqrt{bc}$. Eodem modo $ab-cd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$: & $a^3+bc\sqrt{bc}$ divisum per $a+\sqrt{bc}$, dat $aa+bc-a\sqrt{bc}$: & $aabb-ccdd$ divisum per $\sqrt{ab}-\sqrt{cd}$, dat $\overline{ab+cd}\sqrt{ab}+\overline{ab+cd}\sqrt{cd}$: & $a^3b-abbc$ divisum per $aa+a\sqrt{bc}$, dat $ab-b\sqrt{bc}$: ut & $a^3+abc+\overline{aa-bc}\sqrt{bc}$ divisum per $a-\sqrt{bc}$, dat $aa+bc+2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$: quia $\sqrt{a^4+b^4}$ per $c-d$ seu $\sqrt{cc-2cd+dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{c-d}$, vel $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{cc-2cd+dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c-d}\sqrt{a^4+b^4}$. Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, fiet quotiens $\frac{a}{a+b}\sqrt{aa+bb}$. Similiter $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa-bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa+bb}{\sqrt{aa-bb}}$: & $aa+\sqrt{abcd}$ per $a+\sqrt{bc}$, facit $\frac{aa+\sqrt{abcd}}{a+\sqrt{bc}}$. Sic etiam ad dividendum $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ per $8\sqrt{xx+12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{8\sqrt{xx+12}}$; vel quia $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ producitur ex $\overline{15+2x-xx}$ in $xx+12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx+12}$, fit ut scribi quoque possit $\frac{\overline{15+2x-xx}\ \text{in}\ \overline{xx+12}}{8\sqrt{xx+12}}$, vel breviùs $\frac{15+2x-xx}{8}\sqrt{xx+12}$, utpote dividendo $xx+12$ per $\sqrt{xx+12}$. Non aliter si $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ sit dividendum per $\overline{x+3}\sqrt{xx+12}$, scribo pro quotiente $\frac{180+24x+3xx+2x^3-x^4}{\overline{x+3}\sqrt{xx+12}}$ seu $\frac{60-12x+5xx-x^3}{\sqrt{xx+12}}$. nam $180+24x+3xx+2x^3-x^4$ dividi potest per $x+3$, & fit $60-12x+5xx-x^3$; vel quoniam $60-12x+5xx-x^3$ producitur ex $5-x$ in $xx+12$, fit ut etiam scribi possit $\frac{\overline{5-x}\ \text{in}\ \overline{xx+12}}{\sqrt{xx+12}}$ seu $\overline{5-x}\sqrt{xx+12}$.

De Extractione Radicis Quadratæ ex Binomiis.

MOdus, quo ex quantitatibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radicis quadratæ ex Binomiis, estque talis:

Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.

Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadrata ex semisse summa & differentiæ, per signum + vel — dati Binomii connexa, bina partes radicis quæsita.

Vt ad extrahendum radicem quadratam ex $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, subtraho $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4 + 2aabc + bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4 - 2aabc + bbcc$, cujus radix quadrata $aa - bc$ addita ad majorem partem $aa + bc$, & ab eadem ablata facit summam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum semisses sunt aa & bc: unde radices quadratæ sunt a & $\sqrt{bc}$, quæ si connectantur per signum +, erit radix quæsita $a + \sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm + \frac{pxx}{m} + x\sqrt{4pm}$ erit $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$, *Pag. 182. lin. 13.*

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $\overline{a+b}\sqrt{ab} + 2ab$: subducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^3b + 2aabb + ab^3$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^3b - 2aabb + ab^3$ radix quadrata $\overline{a-b}\sqrt{ab}$. quæ si addatur & auferatur ex majori parte $\overline{a+b}\sqrt{ab}$, fiet summa $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde semissium radices quadratæ constituunt radicem quæsitam.
$\sqrt{a\sqrt{ab}} + \sqrt{b\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{\sqrt{a^3b}} + \sqrt{\sqrt{ab^3}}$.

Nec aliter fit cùm extrahitur radix quadrata ex $\overline{a+d}\sqrt{bc} + 2\sqrt{abcd}$: etenim subtracto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $aabc + 2abcd + bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $aabc - 2abcd + bcdd$, cujus radix quadrata est $\overline{a-d}\sqrt{bc}$: hæc ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $\overline{a+d}\sqrt{bc}$, erit summa $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratæ extrahantur, fiet radix quæsita $\sqrt{a\sqrt{bc}} + \sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{\sqrt{aabc}} + \sqrt{\sqrt{ddbc}}$.

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: satius erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Vt ad extrahendam radicem quadratam

Pag. 6. ex $-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Vniversales.

DE REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

QVoniam ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum; atque nomina imponenda sunt quantitatibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti *a*, *b*, *c*, &c. pro quæsitis autem posteriores *z*, *y*, *x*, &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognitas & incognitas facto discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi. id quod Æquatio vocatur. Vnde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hasce cognitas & incognitas, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hasce similesve species:

$z \infty b$, aut
$zz \infty -az+bb$, aut
$z^3 \infty +azz+bbz-c^3$, aut
$z^4 \infty +az^3+bbzz-c^3z+d^4$, &c.

De Reductione per Additionem.

VT si habeatur æquatio inter $z-3$ & 12, hoc est, si fuerit $z-3 \infty 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+3$, fiet $z \infty 15$. nam -3 & $+3$ addita faciunt 0.

Sic & si fuerit $z-b \infty 0$, addendo utrinque *b*, fiet $z \infty b$. Aut si ha-

si habeatur $b - z \infty 0$, fiet, addendo utrobique z, $b \infty z$. Et si habeatur $zz - aq \infty 0$, erit $zz \infty aq$: ut & si $z^3 - aaq$ æquetur 0, fiet $z^3 \infty aaq$, &c.

Non secus si habeatur $z^4 - az^3 - bbzz \infty d^4 - c^3 z$, addendo utrique parti $+ az^3 + bbzz$, fiet $z^4 \infty az^3 + bbzz - c^3 z + d^4$.

Ex quibus constat, quantitates signo $-$ adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo $+$.

De Reductione per Subtractionem.

DEinde si fuerit $z + 3 \infty 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo si habeatur $zz + az \infty bb$, subtracto utrinque $+ az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^3 + 2c^3 \infty azz + bbz + c^3$ reducetur ad $z^3 \infty azz + bbz - c^3$, subtrahendo utrinque $+ 2c^3$.

Vnde colligitur quantitates signo $+$ adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo $-$: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

POrrò si ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3, $z \infty 15$. Sic & si habeatur $z \infty \frac{aq}{z}$, invenietur, multiplicando utrinque per z, $zz \infty aq$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z - b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipsa pars multiplicatur per $z - b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z - b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter si sit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam, sublato denominatore

 tore

tore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata est pars prior per a, & fit zz; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz-bz+bb}{z}$ multiplicare per a, ut habeatur $\frac{azz-abz+abb}{z}$. Vnde cum æquatio proposita reducta sit ad $zz \infty \frac{azz-abz+abb}{z}$, si denuo utraque pars multiplicetur per z, denominatorem posterioris partis $\frac{azz-abz+abb}{z}$, fiet $z^3 \infty azz-abz+abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars est fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem est ac si binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipsæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Vbi notandum, ad majorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non rarò tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad simpliciores terminos reduci posse. Vt si fuerit $\frac{z^3}{zz-aa} \infty \frac{az-aa}{z+a}$: reductis denominatoribus $zz-aa$ & $z+a$ ad $z-a$ & 1, fiet $\frac{z^3}{z-a} \infty \frac{az-aa}{1}$. ac proinde, si multiplicetur per crucem, invenietur $z^3 \infty azz-2aaz+a^3$. Similiter si habeatur $\frac{aaz-bbz}{z+b} \infty \frac{a^3-abb}{z}$: reductis numeratoribus $aaz-bbz$ & a^3-abb ad z & a, habebitur $\frac{z}{z+b} \infty \frac{a}{z}$, ubi si per crucem multiplicetur, fiet $zz \infty az+ab$. Non secus si habeatur $\frac{azz-bzz}{bb-bz} \infty \frac{aa-ab}{b}$: cum numeratores $azz-bzz$ & $aa-ab$ reduci possint ad zz & a, ut & denominatores $bb-bz$ & b ad $b-z$ & 1, fiet $\frac{zz}{b-z} \infty \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exsurget $zz \infty -az+ab$.

Huc etiam refer, cùm integrum æquatur fractioni. Vt si habeatur æquatio inter $\frac{az^3-bz^3}{zz+az+aa}$ & $ab-bb$: substituta enim unitate pro denominatore ipsius integri $ab-bb$, cum az^3-bz^3 & $ab-bb$ reduci possint ad z^3 & b, erit æquatio talis

$\frac{z^3}{zz+az+aa} \infty \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \infty bzz + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur $\sqrt{z}$ æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \infty 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \infty \sqrt{5}$: ductâ utrâque parte in se quadratè, fiet $z \infty 5$. Pari ratione si $\sqrt{z}$ æquetur $\sqrt{aab - b}$, erit $z \infty aab - b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C.\,z} \infty \sqrt{C.\,aabb - b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \infty aabb - b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

Postea si detur $zz \infty 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z, oriatur $z \infty 4$. Sic & si habeatur $z^4 \infty az^3 + bbzz$, dividendo utrinque per zz, fiet $zz \infty az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \infty 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \infty 4$. Eodem modo si fuerit $az \infty ab$, dividendo utramque partem per a, fiet $z \infty b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \infty bb$, orietur, divisâ utrâque parte per $a - b$, $x \infty \frac{bb}{a-b}$. Haud secus si pro- Pag. 149. lin. 27.
ponatur $azz + bzz \infty abz + bbz - abb - b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a + b$, orietur $zz \infty bz - bb$. Sic & si fuerit $azz - bzz \infty aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a - b$, fiet $zz \infty az + bz + \frac{abc}{a-b}$, seu $zz \infty \frac{a}{+b}z + \frac{abc}{a-b}$.

Huc referendum quoque est, cùm binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Vt si fuerit æquatio inter $az^4 - abz^3 + abbzz$ & $-abz^3 + 2abbzz - 2ab^3z + ab^4$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $azz - abz + abb$, orietur $zz \infty -bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

Denique ad reducendum $zz \infty 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, proveniat

veniat $z \infty 5$. Sic & si fuerit $z^3 \infty 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \infty 5$. Eâdem ratione, si habeatur $zz \infty aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \infty a + b$. Nec aliter fit si fuerit $zz \infty aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \infty a + \sqrt{bc}$. Non secus si xx Pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz+3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz-3aa}{4}} \infty \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}} \infty \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \infty \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$. Quo facto, multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{az^4}{b} + \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{z^4-9a^4}{4}$. Vbi si utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit $\frac{az^4}{b} - \frac{aaz^4}{bb} \infty \frac{9a^4}{4}$. Porrò ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omittendo, obtinebitur $4abz^4 - 4aaz^4 \infty 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a, hoc est, a ubique deleatur fitque $4bz^4 - 4az^4 \infty 9a^3bb$: quo facto, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte sola, eritque $z^4 \infty \frac{9a^3bb}{4b-4a}$. Vbi si utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \infty \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, invenietur $z \infty \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem

nem inſtitui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates ſurdas; & reductionem per diviſionem, tam ad deprimendas dimenſiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & ſimpliciſſimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis conſtantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæſitam ex data æquatione inveniendam utiles eſſe poſſint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta ſufficiant.

FINIS.

FRANCISCVS à SCHOOTEN

AD LECTOREM.

CÆterùm ne locus ſuperſtes hujus paginæ vacuus relinqueretur, viſum fuit hoc loco ſimul indicare ſphalmata, quæ in Exercitationibus noſtris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem emiſimus, fuerunt commiſſa, ac poſtmodum à nobis recognita: ut, iis ſequenti modo correctis, Lectoris ſtudium in conſimili argumento abſque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *quæſtio*. p. 163. l. penult. lege *quæſiverim*. p. 193. l. 12. lege *nulla omnino*. p. 228. l. 3 lege fit zz—2*aa*. ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *deſcriptio*. p. 317. l. 22 lege *quod eſt rectum*. p. 327. l. 4 lege *Oſtenſo*. ibid. l. antep. lege *ipſa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro E C, E F lege ε C, ε F. p. 361. l. 1. lege *ad E, ita ut A E ſit æqualis A B*. p. 372. l. antep. poſt *Quod*, & p. 393. l. 9 poſt *Quod eo* tolle virgulas. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7 lege 1634. p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471. l. 22 lege *in locum x x*. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linearum 2, 3, 4, 5 ſunt ſubſtituendæ, & vice verſâ. p. 527. l. 21 lege *Hæ autem*.

DE ÆQVATIONVM

Natura, Constitutione, & Limitibus

Opuscula Duo.

Incepta à

FLORIMONDO DE BEAVNE,

In Curia Blesensi Consiliario Regio;

Absoluta verò, & post mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,

Medicinæ & Mathematum in Regia Academia Hafniensi Professore publico.



AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.

Sumptibus Societatis.

SVMMO MVSARVM

MÆCENATI

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO,

IOACHIMO GERSDORPH

TOPARCHÆ IN TVNDBYHOLM, &c.

EQVITI AVRATO,

REGNI DANIÆ SVMMO AVLÆ MAGISTRO,

PRINCIPI SENATORI,

REGIÆ MAIESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI

HOC

SPECIMEN ANALYTICES

NOVO ARGVMENTO

CONSECRAT

OBSEQVIVM.

Quod

QVod jam pridem in votis erat, ſtudii & pietatis meæ experimentum Tibi probari, id recentiſſima Muſarum Algebra interpretabitur. Etſi enim, beneficia maxima, quibus me totamque domum noſtram oneraſti, quàm grato animo exceperim, mihi ipſe ſim teſtis; tamen miſeram eam vitam putavi, cui eſſe gratam probare antea non licuit: id aliquo obſequio, tum ipſi Tibi, tum cæteris omnibus indicatum, maximeque perſpicuum eſſe deſideravi. Neque æquum eſt, virtutis deprædicationem privatis tantùm parietibus claudi. Inter ingratos etiam annumerantur ii; qui beneficia accepta paucis commemorant; totus Orbis, adhibendus eſt, pietatis noſtræ teſtis & conſcius. Quoniam verò monimentum Tuarum virtutum nulla unquam obſcurabit oblivio; nullum erit tali Heroï dignius genus obſequii, quàm

quod nulla temporis circumſcriptione terminatur. Quocirca hoc opuſculum Algebraïcum opportuniſſimum exiſtimavi, quod meæ perpetuæ obſervantiæ teſtem ſempiternum conſtituerem; in quod haud obſcurè conjicio, nihil ſenectuti, nihil ſucceſſoribus licere. Mirandam Algebræ vim multis verbis exponere ſupervacuum eſt, quippe ſecura demonſtrationis ſuæ, ſemper & pacis & belli ſerviit artibus; in qua hoc eximium eſt, quòd abundantias defectusque pari momento æſtimet, neque illi, quæ plus habent, magis neceſſaria ſunt, quàm quæ minus; atque hoc ſuæ ſcientiæ habet monimentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & ſcientiarum incrementa, non in ipſarum modo ingenio, ſed etiam in ſuperiorum clementia ſita ſunt; æſtimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi conſtituit; & quis neget, eximium decus, ſæ-

piùs

piùs favoris, quàm virtutis esse beneficium? unde patrono & defensore iis opus est, sub cujus auspiciis floreant. Algebræ nihil ad augendum fastigium superest, hoc tamen uno modo crescere potest. Te ergo præsertim invocat, cujus cepimus & affectus & judicii experimentum, quantum maximum Musæ capere potuerunt. Indulgentiæ Tuæ propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosâ tranquillitate provectas improvisus turbo abstulerat, Tuâ benignitate resarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Græcas, quas majoribus suis ita reddidisti, ut illæ utrum plus Tibi, an Tu illis debeas ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuæ benevolentiæ usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut

literas ſuſciperes, attribuas, ut ſuſceptas tuearis ac foveas: atque hoc grati animi, non omnino quale velim, ſed quale poſſum hoc tempore monimentum, favore excipere digneris. Celebratum eſt famâ & acclamatione quantum Aſtronomiam amplificaverit Dania, Tibi verò renaſcentis Aſtronomiæ gratia debetur. Et ſi propoſito annueris, non tam patriæ quàm Tibi debitorem conſtitues etiam Algebram, hoc eſt, Matheſin Vniverſalem. Ego florentem virtutis Tuæ gloriam æternam opto, Tibique feliciſſimos annos precatus, in clientelam Tuam receptum eſſe, ſupra humanum ſolatium recreabor.

Illæ & Excmæ Dni Væ

Hafniæ, Anno clↄ Iↄ clvii.

Deditiſſimus

ERASMIVS BARTHOLINVS, Medicinæ & Mathematum Profeſſor Regius.

ERASMI BARTHOLINI
Ad Tractatum de Natura & Constitutione
Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAVDIVM HARDY,

Regis Galliæ Consiliarium.

QVamvis sinistra hujus seculi judicia parùm apud me valeant, tamen à divulgandis ejusmodi quemlibet jure absterrerent, quæ diversas hominum censuras vitare nequeunt. Verùm ego alto supercilio spretis calumniis, æquitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desistere nolui, tibique, Vir Clarissime, exponere constitui,ea,quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentius, quò cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset,D.De Beaune,in Curia Blesensi Consiliarium Regium. Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio,& in tantum laudandus,in quantum intelligi virtus potest; tamen hoc in eo maximum fuit, quòd Mathemata doctissimus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes, ita Analytices speciosæ peritiâ proximus. Quo momento impulsus, dum Blesiis linguæ Gallicæ exercendæ gratiâ degerem,amicitiam tanti Viri colui, diligenterque eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter amplectebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis ferè sermo, & quoties alter-

alterutri de Analyticis sermocinari volupe, toties nostra conferri colloquia necesse erat. Unde non obscurè intellexi, quantis fuerat ingenii dotibus ac studiorum eminens, à quo, si publica negotia permitterent, perfectio Algebræ maximè sperari posset. Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ meditatus erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille multa sibi obstare, occupationes tam publicas quam privatas, valetudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ ad intellectum suarum meditationum necessaria erant, desiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipsi polliceri paratissimam cœpi, & significare conscriptam esse à me Isagogen Cartesianam, quorum neutrum proposito moram afferre diutiùs posset. Quibus valde recreatus, de edendis operibus suis seriò cogitabat. Sed, cùm Arthriticis doloribus plus solito, lecto detineretur, omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, curam transferre cogebatur. Ego interim ad perlustrandas reliquas Galliæ provincias avocatus, per aliquod tempus substiti Flexiæ; unde, cum varia negotia reverti Lutetiam suaderent, placuit Castrum Blesense transire, ut de sanitate amici certior fierem. Quem in prædio suo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cùm deprehendissem, & affirmantem parùm prosperâ valetudine ex eo tempore se usum fuisse; non mediocriter dolui, egregiis inventis fortunam tam esse adversam: mea verò studia iterato

ratò

ratò obtuli, promittens, me bono publico, ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, ægrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia defluxionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ operâ uti posset; adeoque rogasse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundem esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potiùs iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexspectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gasti-

 nensis,

nensis, milite utriusque partis liberaretur; prædonibus tamen infestari vias significatum est. Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri me commisi; parvi æstimans, uno periculo, & amico prodesse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere, salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itineris eventum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostrorum operum, forsan quòd diligentius, quàm permitteret anni tempus, Algebraïcis subtilitatibus incumberem, æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gravissimum morbum ex febri synocho inciderem. Et jam de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò animam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam, cum amico aliquo, qui lecto ejus assiderat, de rebus Analyticis differentem, subitò destituit vox, deinde totum corpus vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam valetudinem die 19 Augusti, Anno 1652, natus Anno 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit spes omnium mortalitas. Ego, cum mihi indicari inconsultum ducerent nostri, dum morbus nondum declinaret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi, ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant adversaria, nullam curam mortuo detrectans, quam vivo destinaveram, publicæ utilitatis ratio-

nem

nem habiturus. Reluctantibus verò hæredibus, cum alius pecuniâ solicitasset animos eorum; parum abfuit, quin idem scripta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occœpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur; sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentiùs inspiciens, animadverti plura affectata quam effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopolæ fastidivissent. Tractatûs de Natura & Constitutione Æquationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum vivo comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Æquationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallicè prius conscripsisse, tibique & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latinè edere coactus sum, ne diutiùs laterent. Nam etsi tibi

dum in Italia degerem, adeò cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debebunt posteri; tamen ne in Gallia quidem votum assecutus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subjiceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi, ut hæc unà imprimerentur. Consentiente verò Typographo modò Latinè extarent, placuit Latinam interpretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris precibus inobediens, quàm publici negligentior reputari. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violatæ fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem, alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen brevi videbit benevolus Lector, si Typographi obedierint. Interea hisce fruere, tuque Vir Clarissime, judica quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fructus colligi possit, tuum namque judicium erit instar omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune acceptum referant; errores verò si offenderint, benigne corrigant, meæque humanitati ascribant. Vale.

FLORIMONDI DE BEAVNE

PRÆFATIO.

DEcreveram in publicum edere hosce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo insequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum gravissimo ad oculos defluxu, oculorum usu privatus fui. Vnde proposito planè destitissem, nisi D. Erasmius Bartholinus operam mihi suam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione sepulta jacerent, obtulisset. Ejus igitur auxilio hoc opus composui, ad quod intelligendum suppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes versatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctissimis Francisci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheseos Vniversalis, seu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

PRIOR TRACTATUS

DE

NATURA

ET

CONSTITUTIONE ÆQUATIONUM.

DE

DE
NATVRA ÆQVATIONVM.

Caput I.

MVltò faciliùs inveniemus Naturam & Conſtitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum ſimilibus ſeu ejuſdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præſtitit Viëta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita diſponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipſos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimenſiones deſcendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipſam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimenſionum exiſtens nullis aliis quantitatibus adficitur; ſecundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimenſione minor eſt; tertium in quo duabus; & ſic deinceps, uſque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, aſteriſco complebimus, quæ tum ſub numero terminorum comprehendentur. Hæc omnia beneficio tranſpoſitionis facilè peraguntur.

Ex iis, quæ ſcripta & commentata ſunt in Geometriam Renati des Cartes, nota eſt methodus cognoſcendi, quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione: nimirum, poſſe Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes ſignorum continuæ adfuerint, & quoties eadem ſigna ſe invicem ſequuntur immutata, tot poſſe reperiri falſas radices: modò in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porrò, duas Æquationes ſimiles eſſe dicimus ſeu ejuſdem formæ, quando in utraque idem eſt primus terminus, & reliqui termini in utraque ſimiliter ſunt affecti; & ſi in una terminus aliquis abfuerit, ut is quoque abſit in altera. Nam cùm ſimiles ſunt Æquationes, eandem habebunt conſtitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio ſeu collatio ſingulorum terminorum unius cum ſingulis terminis correſpondentibus alterius.

CAPVT II.

De natura & constitutione Æquationum Quadratarum, seu duarum dimensionum.

QVando æquationes hæ sunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas sequentes:

$$xx + lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx - mm \propto 0$$
$$xx - lx + mm \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Ad intelligendam naturam & constitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$ sequens æquatio: $xx \begin{array}{l} -b \\ +c \end{array} x - bc \propto 0$. Supponendo igitur c majorem quàm b, eandem habebit formam atque prima propositarum $xx + lx - mm \propto 0$. & per consequens, binæ hæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparationem terminorum secundorum habebimus $c - b \propto l$. Vnde discimus, l esse differentiam inter falsam radicem c & veram b; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem ipsi $c - l$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse æqualem ipsi $b + l$.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum habebimus mm æqualem bc. Vnde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b æqualem esse $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c æqualem esse $\frac{mm}{b}$.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $x - b \propto 0$ & $x + c \propto 0$, æquatio $xx \begin{array}{l} -b \\ +c \end{array} x - bc \propto 0$. In qua si supponamus b majorem quàm c, erit ipsa ejusdem formæ cum secunda proposita $xx - lx - mm \propto 0$. Et per consequens duæ illæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-

latione secundorum terminorum $c - b \infty - l$, vel $l \infty b - c$. Vnde discimus, quòd l est differentia inter veram radicem b & falsam c; & si cognita fuerit falsa c, erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b, falsa c erit æqualis $b - l$.

Porrò, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Vnde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; &, cognitâ falsâ c, veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; &, cognitâ verâ b, falsam c esse $\infty \frac{mm}{b}$.

3 *Propositio.*

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x - c \infty 0$, æquationem sequentem $xx \begin{matrix} -b \\ -c \end{matrix} x + bc \infty 0$, & habebit eandem formam atque proposita tertia $xx - lx + mm \infty 0$, & consequenter hæ binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Vnde discimus, quòd l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c, est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c, altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \infty 0$, & $x + m \infty 0$. Vnde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m.

CAPVT III.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

OMnes hæ æquationes redeuentur ad tres sequentes formas:

$$x^3 * + mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 * - mmx + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^3 * - bbx - bcc \propto 0$. Supposito autem cc majori quàm bb,
$+ cc$
ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \propto 0$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \propto mm$. Vnde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \propto 0$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrit ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$. Vnde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \propto 0$. Supposito autem bb majori quàm cc, ha-
$+ cc$
bebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \propto mm$. Vnde constat, cc esse æquale $bb - mm$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \propto 0$ duas reliquas radices concernere. Porrò, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 *Pro-*

3 *Propositio.*

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - cc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 * \begin{array}{l} -bbx \\ -cc \end{array} + bcc \infty 0$, eandem habens formam cum tertia proposita $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Vnde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + cc \infty mm$. Vnde constat, cc æquale esse $mm - bb$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \infty 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bcc$, & per consequens $cc \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

CAPVT IV.

De natura & constitutione Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * - n^3 \infty 0.$$
$$x^3 - lxx * + n^3 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ +c \end{array} * - bbc \infty 0$. Et suppositâ c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx * - n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde constat, co-

gnitâ verâ radice b, æquationem $xx + \begin{array}{l} b \\ +l \end{array} x + bb + bl \propto 0$ duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \propto bbc$. unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; & , cognitâ radice b, æquationem $xx + \frac{n^3}{b}\ x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^3 \begin{array}{l} -b \\ +c \end{array} xx * - bbc \propto 0$. Et suppositâ b majore quàm c erit ejusdem formæ cum secunda propositarum $x^3 - lxx * - n^3 \propto 0$, adeoque erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $b - c \propto l$. Vnde constat, c esse æqualem $b - l$; & , cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx + \begin{array}{l} b \\ -l \end{array} x + bb - bl \propto 0$ duas reliquas radices respicere.

Porrò per comparationem postremorum terminorum habebimus $n^3 \propto bbc$. Vnde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; & , si vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb} x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ duas reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione formemus ex duabus $xx - cx - bc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l} -c \\ -b \end{array} xx * + bbc \propto 0$, quæ habebit eandem formam atque tertia æquationum propositarum $x^3 - lxx * + n^3 \propto 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem secundorum terminorum habebimus $c + b \propto l$. Vnde discimus, quòd c æquetur $l - b$; & , si vera radix b sit cognita, quòd æquatio $xx \begin{array}{l} -b \\ -l \end{array} x - bb - bl \propto 0$ ad duas reliquas radices investigandas referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \infty bbc$, unde ſequitur c æquari $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx - \frac{n^3}{bb}x - \frac{n^3}{b} \infty o$ reliquis duabus inveniendis inſervire.

CAPVT V.

De natura & conſtitutione Æquationum Cubicarum ſeu trium dimenſionum, in quibus omnes termini extant.

ÆQuationes hæ reducuntur ad ſeptem formas ſequentes:

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty o.$$
$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty o.$$
$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty o.$$
$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty o.$$
$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty o.$$
$$x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty o.$$
$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty o.$$

1 *Propoſitio.*

Ad cognoſcendam naturam & conſtitutionem primæ propoſitionis, fiat ex multiplicatione $xx - cx + dd \infty o$ per $x - b \infty o$, æquatio ſequens $x^3 \begin{array}{l} -bxx \\ -c \end{array} \begin{array}{l} +ddx \\ +bc \end{array} - bdd \infty o$. atque eandem habebunt naturam & conſtitutionem. Factâ ergo comparatione, ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$, vel $c \infty l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd + bc \infty mm$, hoc eſt, $dd \infty mm + bb - bl$, quoniam c eſt inventa æquari $l - b$. Vnde apparet, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} + mm + bb - bl \infty o$ duas reliquas radices reſpicere. Denique ex collatione poſtremorum terminorum habebimus $bdd \infty n^3$. unde conſtat, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $xx \begin{array}{l} -lx \\ +b \end{array} + \frac{n^3}{b} \infty o$ duas reliquas radices concernere.

2 Propositio.

Pro secunda propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd = 0$ per $x - b = 0$ æquatio hæc $x^3 - bxx - bcx - bdd = 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c \qquad + dd$

& suppositâ c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit eandem formam, quàm propositio secunda $x^3 + lxx - mmx - n^3 = 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b = l$, hoc est, $c = l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc = -mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, habebitur $dd = bl + bb - mm$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + lx + bb + bl - mm = 0$ duabus reliquis radicibus investi-
$\;\; + b$

gandis esse utilem. Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $bdd = n^3$. Vnde sequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$xx + bx + \frac{n^3}{b} = 0$ reliquis duabus inservituram.
$\;\; + l$

3 Propositio.

Pro tertia propositione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd = 0$ per $x - b = 0$ eadem æquatio $x^3 - bxx - bcx - bdd = 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c \qquad + dd$

Et suppositâ b majore quàm c, & bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum tertiâ propositarum $x^3 - lxx - mmx - n^3 = 0$, & consequenter ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b = -l$, hoc est, $c = b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc = mm$, hoc est, substituto valore invento ipsius c, erit $dd = bb - bl - mm$. Vnde constat, quòd, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx + bx + bb = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - l \quad - bl$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - mm$

ad duas investigandas reliquas adhiberi possit. Denique, ex collatione

latione postremorum terminorum, habebitur $bdd \propto n^3$. Vnde sequitur, dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\-l\end{array}x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas quærendas esse utilem.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum fiat ex multiplicatione $xx+cx+dd \propto 0$ per $x-b \propto 0$ eadem æquatio $x^3 \begin{array}{l}-b\\+c\end{array}xx \begin{array}{l}-bc\\+dd\end{array}x - bdd \propto 0$. Et suppositâ c majore quàm b, & dd majore quàm bc, erunt ejusdem formæ ac quarta propositio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c-b \propto l$, seu $c \propto l+b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bb + bl + mm$. Vnde constat, cognitâ vera radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array}x + bb + bl + mm \propto 0$ duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \propto n^3$. Vnde sequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array}x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi posse.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array}xx \begin{array}{l}-dd\\+bc\end{array}x + ddb \propto 0$. Et supposito bc majore quàm dd, erit ejusdem formæ cum quinta propositarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis erunt. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum, habebimus $l \propto c+b$, vel $c \propto l-b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bl - bb - mm$. Vnde discimus, cognitâ radice verâ b, æqua-

æquationem hanc $xx \begin{smallmatrix}-l\\+b\end{smallmatrix} x - bl + bb + mm \infty 0$ duabus reliquis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Vnde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; &, cognitâ radice verâ b, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}-l\\+b\end{smallmatrix} x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ duabus reliquis inveniendis inservire.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}+c\\-b\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-dd\\-bc\end{smallmatrix} x + ddb \infty 0$. Et, suppositâ c majori quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum erit $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Vnde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx \begin{smallmatrix}+l\\+b\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-mm\\+bl\\+bb\end{smallmatrix} \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$: & per consequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $xx \begin{smallmatrix}+l\\+b\end{smallmatrix} x - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad investigandas duas reliquas utilis erit.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \infty 0$ & $xx + cx - dd \infty 0$ æquatio $x^3 \begin{smallmatrix}+c\\-b\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}-dd\\-bc\end{smallmatrix} x + ddb \infty 0$. Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum, $l \infty b -$

$l \propto b - c$, seu $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \propto bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bb + bl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $xx + \begin{matrix} b \\ -l \end{matrix} x - mm + bb - bl \propto 0$ ad inveniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \propto n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; &, cùm cognoscitur vera radix b, hæc æquatio $xx + \begin{matrix} b \\ -l \end{matrix} x - \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

CAPVT VI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

HVjus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$x^4 * * + n^3 x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 * * - n^3 x + p^4 \propto 0.$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione prioris propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * * + \begin{matrix} c^3 \\ -b^3 \end{matrix} x - bc^3 \propto 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3, habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 * * + n^3 x - p^4 \propto 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \propto n^3$, hoc est, $c^3 \propto n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \propto 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, fit $p^4 \propto bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * * \begin{matrix} +c^3 \\ -b^3 \end{matrix} x - bc^3 \infty 0$. Et, si ponatur b^3 major quàm c^3, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 * * - n^3 x - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty - n^3$, hoc est, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Unde cognoscimus, inventâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porrò, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ tres reliquas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * * \begin{matrix} -c^3 \\ -b^3 \end{matrix} x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem formam atque tertia propositarum $x^4 * * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quartorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

CA-

CAPVT VII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

Æquationes hæ ad sequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 ** + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + c x^3 ** - b^3 c \infty 0.$
$-b$

Supposità vero c majore quàm b, habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^4 + lx^3 ** - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx + blx + b^3 + bbl \infty 0$ tribus reliquis
$+l \quad +bb$
investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty b^3 c$. unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{bb} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + bbc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + c x^3 ** - b^3 c \infty 0$. Et
$-b$

supponendo b superare ipsam c, habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^4 - lx^3 ** - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $-b + c \infty -l$, hoc

 est,

est, $c \propto b - l$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + b^3 - bbl \propto 0$
$- l - bl$
ad tres reliquas investigandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \propto b^3 c$. Vnde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3} xx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ tribus reliquis inservire.

3 Propositio.

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - bcx - bbc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio hæc $x^4 - cx^3 * * + b^3 c \propto 0$
$ - b$
& erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 * * + p^4 \propto 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$x^3 - lxx - blx - bbl + b^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire. Por-
$ + b + bb$
rò, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto b^3 c$, & per consequens $c \propto \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{bb} xx - \frac{p^4}{bb} x - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus desunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

CAPVT VIII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

Æquationes hæ reducuntur ad septem formas sequentes:

$$x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 * + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + bxx - ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * - ccxx + d^3x - bd^3 \infty 0$. quæ ean-

$$\begin{array}{cc} -bb & +bcc \end{array}$$

dem habebit formam atque prima propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc + bb$, hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - bmm$. Vnde comperimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + n^3 & \infty 0 \\ & -m & + b^3 & \\ & & -bmm & \end{array}$$

tribus reliquis indagandis inservire.

Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. Vnde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, inventâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx - mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \qquad\qquad + bb \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse.

2 Propositio.

Pro secunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ per $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 * + ccxx + d^3x - d^3b \infty 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - bb \quad - ccb$

Supposito verò cc majore quàm bb, & ccb majore quàm d^3, habebit illa eandem formam cum secunda propositarum $x^4 * + mm$ $xx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $- cb^3 + d^3 \infty - n^3$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm +$ $b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem $x^3 + bxx + mmx + bmm \infty 0$, tribus reliquis investigandis inservire.
$\qquad + bb \quad + b^3$
$\qquad\qquad\quad - n^3$

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & , cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagan-
$\qquad\qquad\qquad + bb$

das posse usurpari.

3 Propositio.

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + ccx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 * + ccxx + d^3x - d^3b \infty 0$. Et, supposi-
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - bb \quad - ccb$

to bb majore quàm cc, & ccb majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Vnde factâ adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus $- mm \infty - bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $- n^3 \infty - ccb + d^3$, hoc est, substituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm - n^3$. unde patet, si cognita sit radix vera b, hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - m^2 \quad + bm^2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - n^3$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremo, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$, ac proinde $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, poterit æquatio $x^3 + bxx + \begin{array}{l} bbx \\ -mm \end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 - bxx + ccx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 * + \begin{array}{l} ccxx \\ -bb \end{array} + \begin{array}{l} d^3x \\ -ccb \end{array} - d^3b \propto 0$.

Et supposito cc majore quàm b, ac d^3 majore quàm ccb, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc est, $cc \propto mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - ccb$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto b^3 + bmm + n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc $x^3 + bxx + \begin{array}{l} mmx \\ +bb \end{array} \begin{array}{l} +b^3 \\ +bmm \\ +n^3 \end{array} \propto 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis ultimis terminis, erit $d^3 b \propto p^4$; & per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + bxx + \begin{array}{l} mmx \\ +bb \end{array} + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 * - \begin{array}{l} ccxx \\ -bb \end{array} - \begin{array}{l} d^3x \\ +bcc \end{array} + d^3 b \propto 0$. Et supposito bcc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc + bb$,

hoc

hoc est, $cc \infty mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \infty bcc - d^3$; ideoque, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty bmm - b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - bmm & \infty\, 0 \\ \quad\;\; + bb & & + b^3 & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

reliquis tribus quærendis inservituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \infty p^4$. Vnde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & - mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ \quad\;\; + bb & & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

6 Propositio.

Pro sexta propositione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 \,* & + ccxx & - d^3 x & + d^3 b & \infty\, 0. \\ & - bb & - ccb & & \end{array}$$

& supponendo cc majus quàm bb, habebit ipsa eandem formam cum sexta propositarum $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erit utraque ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - bmm - b^3$. Vnde patet, datâ verâ radice b, æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & - n^3 & \infty\, 0 \\ & + bb & + bmm & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

ad trium reliquarum investigationem posse usurpari.

Postremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres quærendas esse adhibendam.

7 Pro-

7 Propositio.

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3+bxx+ccx-d^3 \infty 0$ & $x-b \infty 0$ hæc æquatio

$$x^4 * \begin{array}{l} +ccxx \\ -bb \end{array} \begin{array}{l} -d^3x \\ -bcc \end{array} + bd^3 \infty 0.$$

Et supposito bb majore quàm cc, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 * -mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis terminis, erit $n^3 \infty d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \infty n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 + bxx + \begin{array}{l} bbx \\ -mm \end{array} \begin{array}{l} -n^3 \\ +b^3 \\ -bmm \end{array} \infty 0$$

ad reliquas tres investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 + bxx + \begin{array}{l} b^3x \\ -m^2b \end{array} - \frac{p^4}{b} \infty 0$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPVT IX.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, quarto termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquationem hanc $x^4 - cx^3 + ddxx * - bbdd \propto 0$;
$$\qquad\qquad -b \quad\; +bc$$
habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \propto 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, seu $c \propto l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bl - bb$. unde constat, si cognoscitur verâ radix b, hanc æquationem $x^3 - lxx + mmx + bmm \propto 0$ ad reliquas tres in-
$$\qquad -b \quad -bl \quad -bbl$$
$$\qquad\qquad -bb \quad -b^3$$
vestigandas inservire.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 + cx^3 + ddxx$
$$\qquad\qquad -b \quad -bc$$
$* - ddbb \propto 0$. Suppositâ verò c majore quàm b, & bc majore quam dd, habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \propto 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $- mm \propto dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto bl + bb - mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + lxx + blx + bbl \propto 0$ ad reliquas tres quærendas
$$+b \quad +bb \quad +b^3$$
$$\qquad -m^2 \quad -bm^2$$
posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cùm cognoscitur vera radix

radix b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +\frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -mm & \end{array}$$
tres reliquas radices concernere.

3 Propositio.

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & * & -bbdd \infty 0. \\ & -b & -bc & & \end{array}$$
Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx * -p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bb + bl - mm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +bbl \infty 0 \\ & -l & +bl & +b^3 \\ & & -m^2 & -bm^2 \end{array}$$
tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \\ & -l & +bl & \\ & & -mm & \end{array}$$
pro tribus reliquis usurpari.

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx & +ddxx & * & -bbdd \infty 0. \\ & -b & -bc & & \end{array}$$
Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde,

de, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bl + bb$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l}+l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}+mm\\+bl\\+bb\end{array} x \begin{array}{l}+bmm\\+bbl\\+b^3\end{array} \infty 0$$

ad tres reliquas adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bbdd$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} xx \begin{array}{l}+mm\\+bl\\+bb\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l}-c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}-dd\\+bc\end{array} xx \; * + bbdd \infty 0.$$

Et supponendo bc majus quàm dd, erit ipsa ejusdem formæ cum quinta propositione $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis secundis terminis, habebimus $l \infty b + c$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $dd \infty bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l}-l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}-bl\\+bb\\+mm\end{array} x \begin{array}{l}-bbl\\+bmm\\+b^3\end{array} \infty 0$$

ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \infty p^4$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$x^3 \begin{array}{l}-l\\+b\end{array} xx \begin{array}{l}-bl\\+bb\\+mm\end{array} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$$

pro tribus reliquis investigandis inservire poterit.

6 Pro-

6 *Propositio.*

Pro sexta propositarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddxx * + bbdd \propto 0$.
$\quad -b \quad -bc$

Supponendo autem c majorem quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm - bl - bb$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + lxx - mmx - bmm \propto 0$ tres reliquas radices respicere.
$\quad +b \quad +bl \quad +bbl$
$\quad\quad +bb \quad +b^3$

Postremò, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto bbdd$, ac per consequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio $x^3 + lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres
$\quad +b \quad +bl$
$\quad\quad +bb$
reliquas investigandas erit adhibenda.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 - ddxx * + bbdd \propto 0$.
$\quad -b \quad -bc$

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bb + bl$. unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 + bxx - mmx - bmm \propto 0$
$\quad -l \quad -bl \quad -bbl$
$\quad\quad +bb \quad +b^3$

 tribus

tribus reliquis inservire. Denique, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$; ac per consequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -mmx & -\frac{p^4}{b} \propto o \\ & -l & -bl & \\ & & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

CAPVT X.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertiò termino carentium.

Reducuntur autem hæ æquationes ad septem sequentes formulas:

$$x^4 - lx^3 * + n^3x - p^4 \propto o.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto o.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto o.$$
$$x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \propto o.$$
$$x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \propto o.$$
$$x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \propto o.$$
$$x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \propto o.$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx - bcx + d^3 \propto o$ & $x - b \propto o$, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^4 & -cx^3 * & +d^3x & -bd^3 \propto o, \\ & -b & +bbc & \end{array}$$

& habebit ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 * + n\ x - p^4 \propto o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem inventum c, erit $d^3 \propto n^3 - bbl + b^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & +n^3 \propto o \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & & -bbl \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse. Denique, comparando ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bd^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & -blx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \end{array}$$

ad reliquas tres erit referenda.

2 Propositio.

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b \propto 0. \\ & -b & & -bbc & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & bbc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositio $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus, $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, collatis quartis terminis, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto bbl + b^3 - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +bbl \propto 0 \\ & +b & +bb & +b^3 \\ & & & -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire. Postremò, per comparationem ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto bd^3$, ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & +lxx & +blx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas erit utilis.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus, $x\ + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & * & +d^3x & -d^3b \propto 0. \\ & -b & & -bbc & \end{array}$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bbc majore quàm d^3, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 + lx\ * - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat itaque earum adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $d^3 - bbc \propto -n^3$, hoc est, resti-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \infty lbb + b^3 - n^3$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\end{array} \begin{array}{l}+lbb\\+b^3\\-n^3\end{array} \infty\, 0$$

ad reliquas tres quærendas esse utilem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$; & , cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$x^3 \begin{array}{l}+lxx\\+b\end{array} \begin{array}{l}+blx\\+bb\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty\, 0$$

ad tres reliquas erit referenda.

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l}+c\,x^3\\-b\end{array} * \begin{array}{l}+d^3x\\-bbc\end{array} - d^3 b \infty\, 0.$$

Suppositis autem c majore quàm b, & d^3 majore quàm bbc, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + lx^3 * + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \infty d^3 - bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 + b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l}+bxx\\+l\end{array} \begin{array}{l}+bbx\\+bl\end{array} \begin{array}{l}+n^3\\+b^3\\+bbl\end{array} \infty\, 0$$

ad tres reliquas esse referendam.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3 b$, ac per consequens $d^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$x^3 \begin{array}{l}+bxx\\+l\end{array} \begin{array}{l}+bbx\\+bl\end{array} + \frac{p^4}{b} \infty\, 0$$

tribus reliquis inserviet.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l}-c\,x^3\\-b\end{array} * \begin{array}{l}-d^3x\\+bbc\end{array} + bd^3 \infty\, 0.$$

supponendo autem bbc majus quàm d^3, habebit ipsa eandem formam quinta

atque quinta propositio $x^4 - lx^3 * + n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \infty c + b$; hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty bbc - d^3$, hoc est, $d^3 \infty bbl - b^3 - n^3$, substituto nempe valore c invento. Unde patet, cùm innotescit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - bbl & \infty\, 0 \\ \quad\; + b & + bb & + b^3 & \\ & & + n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & - blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ \quad\; + b & + bb & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas esse adhibendam.

6 Propositio.

Pro sexta propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, æquatio

$$\begin{array}{lll} x^4 - cx^3 * & + d^3 x & + bd^3 \infty\, 0. \\ \quad\;\; - b & - bbc & \end{array}$$

Suppositâ autem c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^4 + lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - n^3 & \infty\, 0 \\ \quad\; + b & + bb & + bbl & \\ & & + b^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bd^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} & \infty\, 0 \\ \quad\; + b & + bb & & \end{array}$$

ad reliquas tres esse referendam.

7 *Propositio.*

Pro feptima propofitione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 * - d^3 x + bd^3 \infty 0$. Suppo-
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad - b \quad\quad - bbc$
nendo autem b majorem quàm c, habebit ipfa eandem formam atque feptima propofitarum $x^4 - lx^3 * - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per confequens ejufdem erunt naturæ & conftitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque fecundos terminos habebimus $c - b \infty - l$, hoc eft, $c \infty b - l$. Deinde, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty d^3 + bbc$, hoc eft, reftituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \infty n^3 - b^3 + bbl$. unde fequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & - n^3 \infty 0 \\ \quad\ - l & - bl & \\ & - bbl & \\ & + b^3 & \end{array}$$
reliquis tribus infervire.

Poftremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty d^3 b$. unde conftat, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc
$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \quad\ - l & - bl & \end{array}$$
ad tres reliquas effe referendam.

CAPVT XI.

De natura & conftitutione Æquationum quatuor dimenfionum, in quibus nullus terminus deeft.

Reducuntur hæ æquationes omnes ad quindecim fequentes formas:

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3 x + p^4 \infty 0.$$
$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$
$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0.$$

1 *Propositio.*

Pro natura & conſtitutione primæ propoſitionis, dignoſcendâ fiat ex duabus hiſce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & +ddxx & -f^3x & +bf^3 \propto 0, \\ & -b & +bc & -bdd & \end{array}$$

quæ eandem habebit formam atque prima propoſitarum $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando ſecundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc eſt, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto dd + bc$, hoc eſt, reſtituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bl + bb$. Tum per collationem quartorum terminorum habebimus $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc eſt, ſubſtituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto n^3 + bbl - bmm - b^3$. Vnde conſtat, cùm innoteſcit vera radix b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -n^3 \propto 0 \\ & +b & +bb & -bbl \\ & & -bl & +bm^2 \\ & & & +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inſervire.

Poſtremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -lxx & +mmx & -\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +b & +bb & \\ & & -bl & \end{array}$$

ad tres reliquas eſſe referendam.

2 *Propositio.*

Pro ſecunda propoſitione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -cx^3 & -ddxx & -f^3x & +bf^3 \propto 0. \\ & -b & +bc & +bdd & \end{array}$$

Sup-

Suppositis autem bc majore quàm dd, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparationem secundorum terminorum habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty bl - bb - mm$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty bbl - b^3 - bmm - n^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & + n^3 & \infty o \\ + b & + bb & + b^3 & \\ & - bl & + bmm & \\ & & - bbl & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} & \infty o \\ + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty o$, & $x - b \infty o$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 & \infty o. \\ - b & + bc & + bdd & & \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty o$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \infty - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \infty - n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl + bmm - b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc

æqua-

æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} -l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} -bl \\ -mm \\ +bb \end{array} x \begin{array}{l} -n^3 \\ -bbl \\ -bm^2 \\ +b^3 \end{array} \propto 0$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} -l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} -mm \\ -bl \\ +bb \end{array} x - \frac{p^4}{b} \propto 0$$

ad tres reliquas esse referendam.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$x^4 \begin{array}{l} -c \\ -b \end{array} x^3 \begin{array}{l} -dd \\ +bc \end{array} xx \begin{array}{l} -f^3 \\ +bdd \end{array} x + bf^3 \propto 0.$$

Suppositis autem dd majore quàm bc, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \propto l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \propto -mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl - b^3 - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} -l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} -mm \\ -bl \\ +bb \end{array} x \begin{array}{l} -bmm \\ -bbl \\ +b^3 \\ +n^3 \end{array} \propto 0$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus, $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{array}{l} -l \\ +b \end{array} xx \begin{array}{l} -mm \\ -bl \\ +bb \end{array} x - \frac{p^4}{b} \propto 0$$

ad tres reliquas esse referendam.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b$, hanc æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & + ddxx & - f^3 x & \\ & - b & - bc & - bdd & + bf^3 \infty 0. \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \infty dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebimus $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + mmb - bbl - b^3$. Vnde patet, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + mmx & - n^3 \infty 0 \\ & + b & - bl & - m^2 b \\ & & - bb & + bbl \\ & & & + b^3. \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \infty p^4$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + mmx & - \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ & + b & - bl & \\ & & - bb & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

6 Propositio.

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - bx^3 & - bcxx & - bddx & + bf^3 \infty 0. \\ & + c & + dd & - f^3 & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \infty l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty - mm$, hoc est, substituto valore c in-

invento, erit $dd \infty bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \infty n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + blx & - n^3 \;\infty\; 0 \\ & + b & + bb & - bmm \\ & & - mm & + bbl \\ & & & + b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & + lxx & + blx & - \frac{p^4}{b} \;\infty\; 0 \\ & + b & + bb & \\ & & - mm & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

7 Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + cx^3 & - ddxx & - f^3x & + bf^3 \;\infty\; 0. \\ & - b & - bc & + bdd & \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b, & bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - b^3 - bbl - n^3$. Vnde sequitur, cognitâ verâ radice b, æquationem hanc

$$\begin{array}{llll} x^3 & + bxx & - mmx & - bmm \;\infty\; 0 \\ & + l & + bb & + b^3 \\ & & + bl & + bbl \\ & & & + n^3 \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquatio-

tionem $x^3 \begin{matrix}+b\\+l\end{matrix} xx \begin{matrix}-mm\\+bb\\+bl\end{matrix} x - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres esse referendam.

8 *Propositio.*

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{matrix}-c\\-b\end{matrix} x^3 \begin{matrix}+dd\\+bc\end{matrix} xx + f^3 x \begin{matrix}-f^3 b\\-bdd\end{matrix} \infty 0$. Supposito autem bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum ex collatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \infty - n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - bbl - n^3 + b^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$x^3 \begin{matrix}-l\\+b\end{matrix} xx \begin{matrix}+mm\\+bb\\-bl\end{matrix} x \begin{matrix}+bmm\\+b^3\\-bbl\\-n^3\end{matrix} \infty 0$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{matrix}-l\\+b\end{matrix} xx \begin{matrix}+mm\\+bb\\-bl\end{matrix} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

9 *Propositio.*

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{matrix}-c\\-b\end{matrix} x^3 \begin{matrix}+d^3\\+bc\end{matrix} xx + f^3 x \begin{matrix}-f^3 b\\-bdd\end{matrix} \infty 0$. Supposito verò f^3 majore quàm bdd, erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $dd \propto mm + bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bmm - bbl$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & + n^3 & \propto 0 \\ \quad + b & + bb & + bmm & \\ & - bl & + b^3 & \\ & & - bbl & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - lxx & + mmx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ \quad + b & + bb & & \\ & - bl & & \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

10 Propositio.

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x & - f^3b & \propto 0. \\ \quad\;\; - b & - bc & - bd^2 & & \end{array}$$

Suppositis autem b majore quàm c, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto - l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto - mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bb - bl - mm$. Tum ex comparatione quartorum terminorum habebitur $f^3 - bd^3 \propto n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - bbl - bmm - n^3$. Vnde constat, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \propto 0 \\ \quad - l & - bl & - bbl & \\ & - m^2 & - bmm & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \infty bf^3$. unde constat, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}+bb\\-bl\\+mm\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

11 *Propositio.*

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^4 \begin{array}{l}-dd\\-bc\end{array} xx \begin{array}{l}+f^3\\+ddb\end{array} x - bf^3 \infty 0$.

Suppositâ autem b majore quàm c, habebit ipsa eandem formam atque undecima propositio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty - l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm + bb - bl$. Tum, ex collatione quartorum terminorum, habebitur $n^3 \infty f^3 + ddb$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 - mmb - b^3 + bbl$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}-mm\\-bb\\+bl\end{array} x \begin{array}{l}+n^3\\+bbl\\-mmb\\-b^3\end{array} \infty 0$ reliquis tribus inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $bf^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem $x^3 \begin{array}{l}+b\\-l\end{array} xx \begin{array}{l}-mm\\-bb\\+bl\end{array} x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres esse referendam.

12 *Propositio.*

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 \begin{array}{l}+c\\-b\end{array} x^3 \begin{array}{l}+dd\\-bc\end{array} xx \begin{array}{l}+f^3\\-bdd\end{array} x - f^3b \infty 0$.

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \propto -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + b^3 & \propto 0 \\ + l & + bl & + bbl & \\ & + mm & + bm^2 & \\ & & - n^3 & \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \propto p^4$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b, hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + bbx & + \frac{p^4}{b} & \propto 0 \\ + l & + bl & & \\ & + mm & & \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

13 *Propositio.*

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{lll} x^4 + cx^3 & + ddxx & + f^3x \\ - b & - bc & - bdd \end{array}$$

$-f^3b \propto 0$. Suppositis autem c majore quàm b, & dd majore quàm bc, nec non f^3 majore quàm bdd, habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis, habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc est, restituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bbl - bmm$. Unde constat, cognitâ

 verâ

verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -bbx & +b^3 \propto 0 \\ & +l & -bl & +bbl \\ & & +m^2 & +n^3 \\ & & & -bm^2 \end{array}$$
reliquis tribus inſervire.

Poſtremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \propto p^4$. unde ſequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & -bbx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +l & -bl & \\ & & +mm & \end{array}$$
ad reliquas tres eſſe referendam.

14 *Propoſitio.*

Pro decima quarta propoſitione formemus ex duabus hiſce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem
$$\begin{array}{lllll} x^4 & +cx^3 & +ddxx & +f^3x & -f^3b \propto 0. \\ & -b & -bc & -bdd & \end{array}$$
Suppoſitis autem c majore quàm b, & bc majore quàm dd, nec non bdd majore quàm f^3, habebit ipſa eandem formam atque decima quarta propoſitio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per conſequens ejuſdem erunt naturæ & conſtitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione ſecundorum terminorum habebimus $l \propto c - b$, hoc eſt, $c \propto l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto - mm$, hoc eſt, ſubſtituto valore c invento, erit $dd \propto bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \propto - n^3$, hoc eſt, ſubſtituto valore dd invento, erit $f^3 \propto b^3 + bbl - bmm - n^3$. Vnde diſcimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +b^3 \propto 0 \\ & +l & +bl & +bbl \\ & & -m^2 & -bm^2 \\ & & & -n^3 \end{array}$$
tribus reliquis inſervire.

Denique, ex comparatione poſtremorum terminorum, habebimus $p^4 \propto f^3 b$. unde ſequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem
$$\begin{array}{llll} x^3 & +bxx & +bbx & +\frac{p^4}{b} \propto 0 \\ & +l & +bl & \\ & & -m^2 & \end{array}$$
ad tres reliquas eſſe referendam.

15 *Pro-*

15 *Propositio.*

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 + cx^3 - ddxx + f^3x - bf^3 \infty 0 \\ \quad\;\; - b \quad\; - bc \quad\;\; + bdd \end{array}$$

Suppositâ verò c majore quàm b, habebit ipsa eandem formam atque decima quinta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, conferendoque secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis, habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Vnde discimus, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0 \\ \quad\;\; + l \quad\; + bl \quad + bbl \\ \qquad\qquad\; - mm \quad + n^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - bm^2 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty f^3 b$, ac per consequens $f^3 \infty \frac{p^4}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b, hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0 \\ \quad\;\; + l \quad\; + bl \\ \qquad\quad\;\; - mm \end{array}$$

ad tres reliquas esse referendam.

OBSERVANDA

hîc in genere nonnulla.

1. NOtandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationibus supponere æquationes comparatas inter se habuisse æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Dioristicus, quem subjungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, pa-

tebit, mutatis signis terminorum locorum parium, ut 2[di], 4[ti], &c. non mutatis signis reliquorum, (comprehendendo sub terminorum numero etiam locos vacantes:) secundum terminum semper æquari summæ radicum æquationis, affectarum cum suis signis + & —; tertium verò, summæ productorum earundem radicum, cùm singulæ binæ in se invicem ducuntur: & quartum, summæ productorum multiplicationis, factæ ex singulis ternis, atque sic deinceps.

Vnde sequitur, deficiente secundo termino, ipsam falsam summamvè falsarum radicum æquari ipsi veræ vel verarum summæ; &, deficiente tertio termino, productum vel summam productorum ex binis, per signum + vel — designatorum, æquari summæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario signo afficitur, & sic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x + c \infty 0$ hæc æquatio $xx \begin{array}{l} -b \\ +c \end{array} x - bc \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini ac retento signo tertii, habebimus $xx \begin{array}{l} +b \\ -c \end{array} x - bc \infty 0$. Vnde apparet, $b - c$ esse summam radicis veræ $+b$ & falsæ $-c$; & $-bc$ esse productum ex multiplicatione falsæ $-c$ per veram $+b$.

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} x + bc \infty 0$, ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini, retento signo tertii, habebitur $xx \begin{array}{l} +b \\ +c \end{array} x + bc \infty 0$. Vnde apparet, $+b + c$ esse summam duarum verarum radicum, & $+bc$ esse productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, & $x + f \infty 0$ æquatio sequens: $x^3 \begin{array}{l} -b \\ -c \\ +f \end{array} xx \begin{array}{l} +bc \\ -bf \\ -cf \end{array} x + bcf \infty 0$. Quare mutatis signis terminorum loco pari positorum, relinquendo signa reliquorum, habebimus $x^3 \begin{array}{l} +b \\ +c \\ -f \end{array} xx \begin{array}{l} +bc \\ -bf \\ -cf \end{array} x - bcf \infty 0$. Vnde apparet, secundum termi-

num

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b$, $+c$, & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc$, $-bf$, & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b$, $+c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summæ duarum verarum $+b$ & $+c$; &, deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, & $x-d \infty 0$, quæ sit

$$\begin{array}{llll} x^3 - bxx & + bcx & - bcd \infty 0. \\ - c & + db & \\ - d & + dc & \end{array}$$

Et mutatis signis locorum parium, retentis signis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{llll} x^3 + bxx & + dcx & + bcd. \\ + c & + bd & \\ + d & + bc & \end{array}$$

Vnde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b$, $+c$, & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quintum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b \infty 0$, $x-c \infty 0$, $x-d \infty 0$, & $x+f \infty 0$ sequens æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - bx^3 & + bcxx & - bcdx & - bcdf \infty 0. \\ - c & + bd & + bcf & \\ - d & + cd & + bdf & \\ + f & - bf & + cdf & \\ & - cf & & \\ & - df & & \end{array}$$

Vnde mutatis signis terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 + bx^3 & + bcxx & + bcdx & - bcdf \infty 0. \\ + c & + bd & - bcf & \\ + d & + cd & - bdf & \\ - f & - bf & - cdf & \\ & - cf & & \\ & - df & & \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum esse summam productorum ex singulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in se invicem ductarum. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam radicem $-f$ æquari summæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, summam productorum ex binis, per $-$ designatorum, æquari reliquæ summæ productorum ex binis, cum signo $+$ affectorum. Non secus se res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, $x - d \infty 0$, & $x - f \infty 0$ hanc exurgere æquationem

$$\begin{array}{lllll} x^4 - bx^3 & + bcxx & - bcdx & + bcdf \infty 0. \\ \quad\;\; - c & + bd & - bcf & \\ \quad\;\; - d & + cd & - bdf & \\ \quad\;\; - f & + bf & - cdf & \\ & + cf & & \\ & + df & & \end{array}$$

Et mutatis signis locorum imparium, retentis reliquis, habebimus

$$\begin{array}{lllll} x^4 + bx^3 & + bcxx & + bcdx & - bcdf. \\ \quad\;\; + c & + bd & + bcf & \\ \quad\;\; + d & + bf & + bdf & \\ \quad\;\; + f & + cd & + cdf & \\ & + cf & & \\ & + df & & \end{array}$$

Atque apparet, secundum terminum $+b+c+d+f$ esse summam quatuor radicum; tertium terminum $+bc+bd+cd+bf+cf+df$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis binis; quartum $+bcd+bcf+bdf+cdf$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis ternis; ac denique $+bcdf$ esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in se invicem ductarum.

CA-

CAPVT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Æquationis radicibus, unâ falsarum datâ.

Oportet mutare signa terminorum locorum parium æquationis propositæ, ita ut falsæ radices evadant veræ, & veræ falsæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, suppositâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inserviens, sicuti supra docuimus. Atque in æquatione sic inventa mutentur signa terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requisito satisfacientem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$ una ex falsis radicibus data, quæ sit b, atque mutatis signis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$. Supponatur jam radix falsa b hujus æquationis esse vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inserviens, consulatur Capitis V. Prop^tio 2^da; & elicientur inde hæ duæ æquationes

$$xx \begin{array}{l}+l\\+b\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} \infty 0 \quad \& \quad xx \begin{array}{l}+b\\+l\end{array} x + \frac{n^3}{b} \infty 0.$$

Quocirca mutatis utriusque æquationis signis locorum parium, habebimus

$$xx \begin{array}{l}-l\\-b\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\+bl\\-mm\end{array} \infty 0 \quad \& \quad xx \begin{array}{l}-b\\-l\end{array} x + \frac{n^3}{b} \infty 0,$$

quarum qualibet quæsito satisfaciet.

CAPVT XIII.

Ad tollendum secundum terminum Æquationum QVADRATARVM.

$xx + lx - mm \infty 0$. Sit $z - \frac{1}{2}l \infty x$, & habebimus $zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll\\-mm\end{array} \infty 0$.

$$xx - lx - mm \infty 0. \text{ Sit } \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}l + z \infty x,\\ \frac{1}{2}l - y \infty x,\end{array}\right\} \text{eritque} \left\{\begin{array}{l}zz * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll \infty 0\\-mm\end{array}\\ yy * \begin{array}{l}-\frac{1}{4}ll \infty 0.\\-mm\end{array}\end{array}\right.$$

$$xx - lx + mm \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}l + z \infty x,\\ \frac{1}{2}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l}zz * - \frac{1}{4}ll \infty 0.\\ \qquad + mm\\ yy * - \frac{1}{4}ll \infty 0.\\ \qquad + mm\end{array}\right.$$

CVBICARVM.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\ \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l}z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad + m^2 \quad - n^3\\ \qquad\qquad + \frac{1}{3}lm^2\\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad + m^2 \quad - n^3\\ \qquad\qquad - \frac{1}{3}lm^2\end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\ \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l}z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad - m^2 \quad - \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad - n^3\\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad - m^2 \quad + \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad + n^3\end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\ \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l}z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad + mm \quad + \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad + n^3\\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad + m^2 \quad - \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad - n^3\end{array}\right.$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0.\ \text{Sit}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}l + z \infty x,\\ \frac{1}{3}l - y \infty x,\end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{l}z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad - m^2 \quad - \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad + n^3\\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad - m^2 \quad + \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad - n^3\end{array}\right.$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit } z - \frac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque } \begin{array}{l}z^3 * - \frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad - m^2 \quad + \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad - n^3\end{array}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0.\ \text{Sit } z - \frac{1}{3}l \infty x,\ \text{eritque } \begin{array}{l}z^3 * - \frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0.\\ \qquad + m^2 \quad - \frac{1}{3}lm^2\\ \qquad\qquad - n^3\end{array}$$

$x^3 +$

$$x^3+lxx-mmx+n^3\propto 0.\ \text{Sit}\ z-\tfrac{1}{3}l\propto x,\ \text{eritque}\ \begin{array}{llll} z^3\ * & -\frac{1}{3}llz & +\frac{2}{27}l^3 & \propto 0. \\ & -m^2 & +\frac{1}{3}lm^2 & \\ & & +n^3 & \end{array}$$

QVADRATO-QVADRATARVM.

$$\begin{array}{l} x^4-lx^3+mmxx- \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Esto} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4\ * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4\ * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3\,y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} x^4-lx^3-mmxx+ \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Sit} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4\ * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4\ * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3\,y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} x^4-lx^3+mmxx+ \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Sit} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4\ * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4\ * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3\,y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} x^4-lx^3-mmxx- \\ n^3x+p^4\propto 0.\ \text{Esto} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}l+z\propto x, \\ \\ \frac{1}{4}l-y\propto x, \end{array}\right\}\text{eritque}\left\{\begin{array}{lllll} z^4\ * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3\,z & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \\ y^4\ * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3\,y & -\frac{3}{256}l^4 & \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 & \propto 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 & \\ & & & +p^4 & \end{array}\right.$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 \infty 0. \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & +p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & +p^4 \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & +\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -mm & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llmm \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & +p^4 \end{array}$$

$$x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 \; y & -\frac{3}{256}l^4 \\ & +m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & +\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & -\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * & -\frac{3}{8}llzz & -\frac{1}{8}l^3 \; z & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & -\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & +n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \\ y^4 * & -\frac{3}{8}llyy & +\frac{1}{8}l^3 \; y & -\frac{3}{256}l^4 \\ & -m^2 & +\frac{1}{2}lm^2 & -\frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ & & -n^3 & +\frac{1}{4}ln^3 \\ & & & -p^4 \end{array} \right.$$

$x^4 -$

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & - \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad + m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & + n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \\ y^4 * - \frac{3}{8}llyy & + \frac{1}{8}l^3 y & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{eritque} \left\{ \begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & - \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & - n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \\ y^4 * - \frac{3}{8}llyy & + \frac{1}{8}l^3 y & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array} \right.$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & + \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 - mm\,xx - n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad - m^2 & + \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & - n^3 & + \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array}$$

$x^4 + lx^3 + mm\,xx + n^3x - p^4 \infty 0$. Esto $z - \frac{1}{4}l \infty x$, eritque

$$\begin{array}{llll} z^4 * - \frac{3}{8}llzz & + \frac{1}{8}l^3 z & - \frac{3}{256}l^4 & \\ \quad + m^2 & - \frac{1}{2}lm^2 & - \frac{1}{16}llm^2 & \infty 0. \\ & + n^3 & - \frac{1}{4}ln^3 & \\ & & - p^4 & \end{array}$$

 Vnde

Vnde colligere licet, omnes ſuppoſitiones, quæ ad tollendum ſecundum terminum adhibentur, neceſſariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione propoſita; & ſi nullæ in his fuerint, id indicio eſſe, nullas quoque eſſe imaginarias in æquatione propoſita. Nam, exempli gratiâ, ſi ſit æquatio $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$: patet, ſi radix eſt realis, x neceſſariò debere æqualis eſſe $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; ſi major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; ſi denique minor fuerit; transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd ſi ſecundus terminus æquationis propoſitæ afficitur ſigno +, ut, exempli gratiâ, ſi ſit $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$: patet, ſi adfuerit radix aliqua realis, ſuppoſitionem hanc $z - \frac{1}{4}l \propto x$ ſemper eſſe neceſſariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde conſtat, radices veras æquationum à radice y denominatarum eſſe falſas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum eſſe falſas æquationum à radice y denominatarum.

CAPVT XIV.

Continens modum tollendi penultimum terminum Æquationum, ſecundo termino carentium.

P*Ro Cubicis.* Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^2 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^3 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & tum rurſus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimenſionum ſupponatur ultimus terminus diviſus per incognitam quantitatem R^4 eſſe æqualis radici æquationis propoſitæ, & ſic in infinitum, transmutatis deinde æquationibus, uti dictum eſt.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere quadratum ultimi termini divisum per incognitam quantitatem R esse æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, &, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^9}{R^6} + \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6, fiet $n^9 + mmn^3 R^4 - n^3 R^5 \infty 0$, adeoque divisis per n^3, fiet $n^6 + mm R^4 - R^6 \infty 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - mm R^4 * - n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione habetur $x \infty \frac{n^3}{R^2}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, fietque $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} - n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 + mm R^4 * - n^5 \infty 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cùm datur R^2, ex supra posita suppositione habetur x.

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$. Esto $\frac{n^3}{R^2} \infty x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^9}{R^6} - \frac{mmn^3}{R^2} + n^3 \infty 0$, hoc est, $R^6 - mm R^4 * + n^6 \infty 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cùm datur R^2 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$. Esto $\frac{p^2}{R} \infty x$, &, transformatâ æquatione fiet, $\frac{p^8}{R^4} - \frac{mmp^4}{R^2} + \frac{n^3 pp}{R} - p^4 \infty 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4, habebimus $p^8 - mm p^4 R^2 + n^3 pp R^3 - p^4 R^4 \infty 0$, ac proinde divisis per p^4, habebitur $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mm R^2 * - p^4 \infty 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3 x + p^4 \infty 0$. Supponendo $\frac{pp}{R} \infty x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{pp} R^3 + mm R^2 * + p^4 \infty 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exem-

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x + p^4 \infty o$. Suppositâ $x \infty \frac{pp}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty o$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - mmxx + n^3x + p^4 \infty o$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * + p^4 \infty o$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + mmxx - n^3x - p^4 \infty o$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty o$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - mmxx - n^3x - p^4 \infty o$. Et supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^1 + \frac{n^3}{pp}R^3 + mmR^2 * - p^4 \infty o$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + mmxx + n^3x - p^4 \infty o$. Supposito $\frac{pp}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^5}{pp}R^3 - mmR^2 * - p^4 \infty o$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superiùs ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1^mo de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capitis affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

CA-

CAPVT XV.

Methodus transmutandi Æquationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Æquationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PRoponatur hæc æquatio $x^3 * + 3mmx - n^3 = 0$. Supponamus $zz - zx - mm = 0$, hoc est, $x = \frac{zz - mm.}{z.}$ Vnde, transformatâ æquatione, habebitur

$$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^4zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 = 0,$$

hoc est, multiplicatis omnibus per z^3, invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 = 0$, vel $z^6 = n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = \frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognitæ autem ejus radice z, erit ex supra positis radix altera $x = \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m.

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm = 0$, eritque $x = \frac{mm - zz}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 = 0$, hoc est, $z^6 = -n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = -\frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cùm cognoscitur z, habebitur $x = \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 * - mmx - n^3 = 0$, supponaturque $zz - zx + mm = 0$, hoc est, $x = \frac{zz + mm}{z}$. Vnde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^4zz + m^6}{z^3} - \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 = 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 = 0$. seu $z^6 = n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 = \frac{1}{2}n^3 \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}$

Vnde

Vnde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4}\, n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \infty n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPVT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hasce duas æquationes $x^3 + bxx - ccx - d^3 \infty 0$ & $x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \infty - bxx + ccx + d^3$ & $x^3 \infty + lxx - mmx + n^3$, ac per consequens $\begin{array}{l} lxx \\ b \end{array} \begin{array}{l} -mmx \\ -cc \end{array} \begin{array}{l} +n^3 \\ -d^3 \end{array} \infty 0$, hoc est, $xx \infty \frac{mmx + ccx + d^3 - n^3}{l+b}$. in quâ litera x pauciorum est dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantùm æquatio inventa per x, & invenietur $x^3 \infty \frac{\begin{array}{l} mmxx + d^3x \\ cc \quad\quad - n^3 \end{array}}{l+b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem

$$\begin{array}{l} +m^2xx \\ +cc \\ -ll \\ -lb \end{array} \begin{array}{l} -n^3x \\ +lm^2 \\ +bm^2 \\ +d^3 \end{array} \begin{array}{l} -ln^3 \\ -bn^3 \\ \\ \\ \end{array} \infty 0.$$

in quâ litera x similiter duarum tantùm est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparationem facillima. Atque sic continuando inveniri hîc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Vnde apparet, posse quidem aliquando auferri hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Exem-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc \infty 0$ & $xx - bx + dd - bb \infty 0$, habebimus $xx - bx \infty cc$, & $xx - bx \infty + bb - dd$, ergo $cc \infty bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro quibus tollendis, oportet tantùm supponere literas æquales singulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ratione non tantùm obtinebimus æquationem propositam, in qua omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ fuerunt suppositæ. Vnde collatis ordine omnibus hisce æquationibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.\,bbx} - \sqrt{dx} \infty 0$. Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R \infty \sqrt{C.\,bbx}$, & $z \infty \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habebimus $c + R - z \infty 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit $R^3 \infty bbx$, & $zz \infty dx$. Primò, ad tollendum R, habebimus $R \infty z - c$, ideoque $R^3 \infty z^3 - 3czz + 3ccz - c^3$. Atqui est quoque $R^3 \infty bbx$. Quare erit $z^3 - 3czz + 3ccz - c^3 - bbx \infty 0$, & per consequens $z^3 \infty + 3czz - 3ccz + c^3 + bbx$. Sed si multiplicetur superiùs proposita æquatio $zz \infty dx$ per z, habebitur etiam $z^3 \infty dxz$. Ergo erit $\begin{array}{l} 3czz - 3ccz + c^3 \\ - dx \quad + bbx \end{array} \infty 0$, & substituto dx loco zz, habebimus $\begin{array}{l} 3cdx - 3ccz + c^3 \\ \quad - dx \quad + bbx \end{array} \infty 0$, hoc est, $\begin{array}{l} 3ccz \\ dx \end{array} \infty \begin{array}{l} 3cdx + bbx \\ \qquad\quad c^3 \end{array}$, seu $z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z, fiet $zz \infty \dfrac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $zz \infty dx$. Igitur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z \infty 3ccdx + ddxx$, hoc est, $\dfrac{3ccdx + ddxx}{3cdx + bbx + c^3} \infty z$. Inventa autem est $z \infty \dfrac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

$$\begin{array}{llll} d^3x^3 & -3ccddxx & +3c^4dx & -c^6 \propto 0. \\ & -5bbcd & -2c^3bb & \\ & -b^4 & & \end{array}$$

In qua æquatione nullus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantùm operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

FINIS.

Ad

Ad Tractatum de Limitibus Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,

Mathematum in Illustri Leidensi Academia Professori,

ERASMIVS BARTHOLINVS

S. P.

Nisi meminissem, quanto majore animo honestatis fructus in conscientia, quàm in fama reponatur; nequaquam opportunum fuisset, in edendis hisce opusculis Analyticis consilium. Verùm quia communibus magis commodis quàm privatæ jactantiæ studui, eò animus ausus est, deliberato consilio obsequi. Cujus meæ conscientiæ interpretem, non alium magis desidero, quàm te, Vir Clarissime, quem utilitatibus aliorum, plus quàm propriæ laudi, indies deservire, compertum habeo. Venit in mentem studiosum illud otium, quod Leidæ mihi semper emolumento, utrisque deinde solatio erat, cujusque varietates si oratione repetere vellem, prout animo pleræque obversantur, non dubito quin existimationi hominum diligentia & fides nostra, & in plerisque etiam pietas subjiceretur. Et licèt nesciam, an ullum

tempus jucundiùs exegerim; tamen eâ de causâ magnifacio, quòd amicitiæ tuæ, usque ad intimam familiaritatem, capacem me redderet. Neque aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ discessurus, Isagogen Cartesianam typis excudendam concinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem. Quâ de causâ, cum non modò offensas, verùm etiam simultates varias subierim; non ignoro, quæ futura sit de hisce jam edendis sententia. Ne dubites tamen quin omnia æquo animo toleraverim, præsertim quia pietas & obsequium causam junxère. Quem enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non improvisa est calumniandi vanitas. Est ita naturâ comprobatum, ut benefactis major ex conscientiâ merces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique, tantum suæ detractum iri gloriæ existimant, quantum cesserit alienæ: postremò, ignavissimus quisque aliorum scripta carpere non veretur. Sic contendere pro moribus temporum eruditio est. Quod recordantem, posteritatis magna miseratio subit. Quot enim præclara inventa putas obscurari, propter scelus hoc obtrectandi? Plerique se intra perpetuum silentium tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretantium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum exemplo quidem didici, nul-

nullam ex meis laboribus ſperare laudem; tanta tamen mihi ſemper fuit reverentia poſterûm, ut cenſuram erroris non tam reformidem quam inhumanitatis. Sed, ut de pictore niſi Artifex judicare, ita niſi Mathematicus non ſatis poteſt perſpicere Mathematica; tuæ potiſſimùm ſententiæ hæc exponuntur. Eximium habent uſum ea quæ ſequenti tractatu exponentur, ad numeroſam Æquationum reſolutionem, ut reliquas utilitates pertranſeam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut judiciis parcant, donec penitus omnia inſpexerint. Et ſi qui fuerint qui hæc recuſaverint, ſciant ſe nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conſcientiam. Te verò, Vir Clariſſime, ſi offenderint, omnibus commendationibus deſtituta reputabo. Vale.

PO-

POSTERIOR TRACTATVS DE LIMITIBVS ÆQVATIONVM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum definiri possint limites, intra quos radices veræ debent offendi.

DE

DE LIMITIBVS ÆQVATIONVM.

CAPVT I.

De Æquationum Quadratarum seu duarum dimensionum limitibus.

Prop. 1. $xx - lx + mm \infty 0$.

PEr transpositionem erit $mm \infty lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx; & diviso utroque termino per x, erit l major quàm x. Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \infty lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm. Vnde diviso utroque termino per l, erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l.

Prop. 2. $xx - lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \infty lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm, & x major quàm m, ac proinde mx majus quàm mm. Vnde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x, erit x minor quàm $l + m$. Rursus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx; ac proinde si uterque terminus dividatur per x, erit x major quàm l, & lx majus quàm ll. Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremò, quandoquidem x major est quàm m, erit lx majus quàm lm, & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Vnde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Prop. 3. $xx + lx - mm \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \infty mm$,& per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x. Rursus existente $xx + lx \infty mm$, erit mm majus quàm xx, & m major quàm x,ac proinde mx majus quàm xx. Atqui habemus $xx + lx \infty mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm. Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

CAPUT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty + mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3. Unde diviso utroque termino per mm, erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \infty n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx, & m major quàm x. Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m.

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \infty n^3$, eritque xx majus quàm mm,& x major quàm m. Erit quoque $x^3 - n^3 \infty mmx$, ideòque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, ac proinde nnx majus quàm n^3. Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \infty x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3; & divisâ utrâque parte per x, erit $mm + nn$ majus quàm xx; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n,at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3, quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non

fit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimensionibus ipsius n^3, sumendoque loco nn rectangulum sub duabus quantitatibus; quarum alterutra non sit ipsâ n minor. Eritque hoc ad sequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 * + mmx - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 \infty n^3 - mmx$, eritque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Rursus erit $mmx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n^3 major quàm x^3, & n major quàm x, ac proinde nnx majus quàm x^3. Sed per transpositionem æquationis propositæ est quoque $x^3 + mmx \infty n^3$. Ergo $mmx + nnx$ majus erit quàm n^3, & divisâ utrâque parte per $nn + mm$, erit x major quàm $\frac{n^3}{nn + mm}$. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ esse major quam $\frac{n^3}{mm + nn}$, sed minor quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n. Possumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimensionum ipsius n^3, ut radicis cubicæ extractio evitetur.

CAPVT III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - lxx * + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + n^3 \infty lxx$, ideoque xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Rursus erit $n^3 \infty lxx - x^3$, & consequenter l major quàm x. Quælibet igitur radicum x æquationis propositæ major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & minor quàm l.

Prop. 2. $x^3 - lxx * - n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus erit $x^3 - n^3 \infty lxx$, & consequenter x major quàm n, & xx majus quàm nn, & nxx majus quàm n^3. Atqui habemus quoque per transpositionem $lxx + n^3 \infty x^3$. Quare erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Dividatur utraque pars per xx, eritque $l + n$ major

major quàm x. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ major quàm l & n, sed minor quàm $l+n$. Manifestum est quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3, quòd loco n sumi possit minor trium dimensionum ipsius n^3, quando x major est; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimensionum ipsius n^3 accipi queat, & sic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

$$Prop. 3. \; x^3 + lxx * - n^3 \infty 0.$$

Per transpositionem erit $x^3 \infty n^3 - lxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Est etiam $lxx \infty n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x, & nxx majus quàm x^3. Sed habetur $x^3 + lxx \infty n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3, hoc est, divisâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, sed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n. Demonstratur præterea $nnx + lnx$ majus esse quàm n^3, & $nx + lx$ majus quàm nn, & consequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major est quàm x.

CAPUT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

$$Prop. 1. \; x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0.$$

Per transpositionem habebimus $x^3 - lxx \infty n^3 - mmx$. Hinc si x æquetur ipsi l, erit etiam x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, si vicissim l æquetur ipsi $\frac{n^3}{mm}$ hoc est, $lmm \infty n^3$, erit similiter x radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea si $x^3 - lxx$ est realis, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3 - mmx$ realis, & consequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. Quòd si autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor sit, transponatur proposita æquatio hâc ratione $lxx - x^3 \infty mmx - n^3$. Et quandoquidem supponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quàm x, erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quàm $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cùm duo hi termini æquantur. Et si unam tantùm habeat aut tres, quælibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \propto n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quam l.

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam xx ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quam mm, erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx; & si xx minus est quam mm, minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx. Inventi itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3; aut necessariò inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \propto mmx + n^3$, ideoque x major quàm l. Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \propto lxx + n^3$, erit xx majus quam mm, & x major quam m, & mxx majus quam mmx. Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \propto lxx + mmx$, & per consequens x major quam n, & nxx majus quam n^3. Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \propto x^3$, atque inventum est mxx majus quam mmx, & nxx majus quam n^3. Ergo erit $lxx + mxx + nxx$ majus quam x^3. Quocirca si utraque pars dividatur per xx, erit $l + m + n$ major quam x. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quam l, m, & n, sed minor quam $l + m + n$.

Prop. 4. $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + mmx \propto n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx. Sed est quoque $x^3 + lxx \propto n^3 - mmx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x. At verò est etiam $lxx + mmx \propto n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x; quare & nnx majus erit quàm x^3, & lnx majus quàm lxx. Atqui est $x^3 + lxx + mmx \propto n^3$. Ergo $nnx + lnx + mmx$ majus erit quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n.

Prop. 5. $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $mmx + n^3 \propto lxx - x^3$, ideoque l major quàm x. Rursus erit $x^3 + n^3 \propto lxx - mmx$, & per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l. Sed per transpositionem est quoque $x^3 + mmx \propto lxx - n^3$, & consequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - mmx + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + lxx \propto mmx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \propto mmx - lxx$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x. Rursus erit $lxx + n^3 \propto mmx - x^3$, & consequenter m major quàm x. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$, sed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \infty mmx - n^3$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cùm x major est quàm l, tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$; & si minor est quàm l, tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - mmx \infty lxx - n^3$. Hinc si xx æquetur ipsi mm, erit quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini mm & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $lmm \infty n^3$, una radicum æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 \infty lxx + mmx$, ideoque $lxx + mmx$ majus quàm x^3, & $lx + mm$ majus quàm xx. At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m, erit & $lx + mx$ majus quàm xx, ac per consequens $l + m$ major quàm x. Quòd si autem minor fuerit quàm m, multo magis $l + m$ major erit quàm x. Porrò ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + mmx$ etiam majus est quàm n^3. Hinc cùm $l + m$ major sit quàm x, ideoque $llx + lmx$ majus quàm lxx; erit quoque $llx + lmx + mmx$ majus quàm n^3, & x major quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{ll + lm + mm}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{ll + 2lm + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x, si major fuerit x quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si verò m major est quàm x, invenimus, quòd $lxx + mmx$ est majus.

jus quàm n^3, hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm n^3; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$, & conſequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Caput V.

De Æquationibus quatuor dimenſionum, ſecundo & tertio termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 * * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per tranſpoſitionem eſt quoque $p^4 \infty n^3x - x^4$, & conſequenter n^3 major quàm x^3, ac n major quàm x. Ergo utraque radix x æquationis propoſitæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n.

Prop. 2. $x^4 * * - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3x \infty p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & $nnxx$ majus quàm n^3x. Sed eſt quoque $x^4 - p^4 \infty n^3x$, ideoque x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & $ppxx$ majus quàm p^4. At per tranſpoſitionem eſt etiam $n^3x + p^4 \infty x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4. Hinc divisâ utraque parte per xx, erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn+pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propoſitæ eſt major quàm n & p, ſed minor quàm $\sqrt{nn+pp}$, ac proinde multo minor quam $n+p$.

Prop. 3. $x^4 * * + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem erit $x^4 \infty p^4 - n^3x$, ac per conſequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x. Similiter erit $n^3x \infty p^4 - x^4$, & conſequenter p^4 majus quàm x^4, & p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4. Sed eſt præterea $x^4 + n^3x \infty p^4$, ideoque $p^3x + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3+n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propoſitæ eſt major quàm $\frac{p^4}{p^3+n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p.

Ca-

CAPVT VI.

De Æquationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius & quartus terminus deficiunt.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 * * + p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 \infty + lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 \infty lx^3 - x^4$, & consequenter l major quàm x. Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l. Hinc quoniam l major est quàm x, & lx^3 majus quàm p^4, habebitur $llxx$ majus quàm p^4, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{ll}$, & x major quàm $\frac{pp}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4$, ideoque x major quàm l. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, ac proinde px^3 majus quàm p^4. Sed est etiam $lx^3 + p^4 \infty x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l + p$ major quàm x. Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm l & p, at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 * * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 \infty p^4 - lx^3$ ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 \infty p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x, & px^3 majus quàm x^4. Atqui est etiam $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm p^4, & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare invenimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l+p}}$, sed minor quàm p & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitantur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc ca-

su, quoniam x^3 major est quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x, erit pxx majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lp+pp}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lp+pp}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus est quàm x^3, erit $\frac{p^4 x}{l}$ majus quàm x^4, & $lppx$ majus quàm lx^3, quia p major est quàm x. Atqui est $x^4 + lx^3 \infty p^4$. Ergo $\frac{p^4 x}{l} + lppx$ majus erit quàm p^4. Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l, & divisâ per pp, habebitur $ppx + llx$ majus quàm lpp, & x major quàm $\frac{lpp}{ll+pp}$.

De æquationibus quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: siquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipsarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri possint.

CAPVT VII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo termino carentibus.

Prop. 1. $x^{4} * - mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty p^4 - n^3 x$. Vnde apparet, quòd, si fuerit xx æquale ipsi mm, hoc est, $x \infty m$, etiam x ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ sit æqualis futura. Ideoque si fuerit m æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, radix x æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam sive tres habuerit, semper erit inter duos hosce terminos. Præterea cognoscitur, si duo hi termini fuerint æquales, hoc est, $mn^3 \infty p^4$, substituto mn^3 loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - m$, fore, ut non possit habere aliam radicem realem præter m.

Prop.

Prop. 2. $x^4 * + mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - n^3 x \infty p^4 - mmxx$. Unde constat, si x æqualis fuerit ipsi n, fore etiam $xx \infty \frac{p^4}{mm}$; hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$; & si fuerit $n \infty \sqrt{\frac{p^4}{mm}}$ aut $\frac{pp}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & si inæquales fuerint, tunc eam necessariò futuram inter hosce duos. Idem demonstrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{mm}$; nempe si fuerint æquales, radix æquationis propositæ æquabitur unicuique illorum duorum; sin inæquales, necessariò constituetur inter duos, transpositâ scilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \infty n^3 x - mmxx$.

Prop. 3. $x^4 * - mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem erit $x^4 - mmxx \infty n^3 x + p^4$, ideoque xx majus quàm mm, & x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Sed est etiam $x^4 - n^3 x \infty mmxx + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3, & x major quàm n, & nx^3 majus quàm $n^3 x$. Eodem modo est $x^4 - p^4 \infty mmxx + n^3 x$, & consequenter x^4 majus quàm p^4, & x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Atqui per transpositionem est quoque $mmxx + n^3 x + p^4 \infty x^4$. Quare $mx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $m + n + p$ major quàm x. Consimili ratione demonstrabitur, quòd $mmxx + nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4, & consequenter $mm + nn + pp$ majus quàm xx. Invenimus ergo, quòd radix x propositæ æquationis major est quàm m, n, & p, at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{mm + nn + pp}$.

Prop. 4. $x^4 * + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mmxx \infty p^4 - n^3 x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + n^3 x \infty p^4 - mmxx$, ac per con-

 sequens

ſequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, hoc eſt, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Atqui eſt quoque $mmxx+n^3x \infty p^4-x^4$, & conſequenter p^4 majus quàm x^4, ac p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, nec non $mmpx$ majus quàm $mmxx$. Sed eſt etiam $x^4+mmxx+n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x+mmpx+n^3x$ majus eſt quàm p^4, ac per conſequens, diviſâ utrâque parte per $p^3+mmp+n^3$, erit radix x propoſitæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3+mmp+n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p.

Prop. 5. $x^4 * -mmxx+n^3x+p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $n^3x+p^4 \infty mmxx-x^4$, ideoque mm majus quàm xx, & m major quàm x. Similiter eſt $x^4+p^4 \infty mmxx-n^3x$, & conſequenter x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Præterea eſt $x^4+n^3x \infty mmxx-p^4$, ac per conſequens xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc eſt, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m.

Prop. 6. $x^4 * +mmxx-n^3x+p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4+mmxx \infty n^3x-p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed eſt etiam $x^4+p^4 \infty n^3x-mmxx$, ac per conſequens $\frac{n^3}{mm}$ majus quàm x. Similiter eſt $x^4+mmxx+p^4 \infty n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3, & n major quàm x. Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propoſitæ majorem eſſe quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & n.

Prop. 7. $x^4 * -mmxx-n^3x+p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4-mmxx \infty n^3x-p^4$. Vnde patet,

tet, si $x x$ æquatur ipsi $m m$, hoc est, $x \propto m$, eandem x fore æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ac per consequens, si fuerint termini hi m & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis ipsorum; & si inæquales fuerint; neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos m & $\frac{p^4}{n^3}$. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - n^3 x \propto m m x x - p^4$. Vnde similiter discimus, si x^3 æquatur ipsi n^3, hoc est, $x \propto n$, fore etiam $x x \propto \frac{p^4}{m m}$, hoc est, $x \propto \frac{p p}{m}$. Ideoque si hi termini n & $\frac{p p}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propositæ æquabitur singulis eorundem terminorum; sin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propositæ inter illos duos constituta erit. Præterea per transpositionem est $x^4 + p^4 \propto m m x x + n^3 x$, ideoque $m m x x + n^3 x$ majus quàm x^4, & $m m x + n^3$ majus quàm x^3. Porrò, si proposita æquatio est realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n. Si fuerit æqualis vel major, erit $m m x + n n x$ majus quàm x^3, & $m m + n n$ majus quàm $x x$, hoc est, x minor erit quàm $\sqrt{m m + n n}$. Si fuerit x minor quàm n, minor etiam erit quàm $\sqrt{m m + n n}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propositæ necessariò minorem esse quàm $\sqrt{m m + n n}$. Denique existente $x^4 + p^4 \propto m m x x + n^3 x$, erit similiter $m m x x + n^3 x$ majus quàm p^4. Et quia inventa est $\sqrt{m m + n n}$ major quàm x, erit consequenter $m m x \sqrt{m m + n n}$ majus quàm $m m x x$, ideoque $m m x \sqrt{m m + n n}, + n^3 x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{m m \sqrt{m m + n n}, + n^3}$. Quare inventus est terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propositæ. Atque ita modo sequenti capite observato propositione septimâ demonstrari potest, quòd x major est quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{m m n + n^3}$.

CAPVT VIII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx$. Vnde constat, si x est æqualis ipsi l, etiam xx æquari $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, $x \infty \frac{pp}{m}$ ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{pp}{m}$, hoc est, $lm \infty pp$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{pp}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $lm \infty pp$, & $llmm \infty p^4$, substituto $llmm$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty p^4 - lx^3$. Vnde constat, si fuerit $x \infty m$, etiam $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ æquari ipsi x; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty mmxx - lx^3$. Vnde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p, fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{mm}{l}$; ideoque si termini p & $\frac{mm}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty mmxx + p^4$, ideoque x major

major quàm l. Sed & per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm m, & mx^3 majus quàm $mmxx$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + mmxx$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Præterea per transpositionem propositionis est $lx^3 + mmxx + p^4 \infty x^4$, ideoque $lx^3 + mx^3 + px^3$, majus quàm x^4, & $l + m + p$ majus quàm x. Quare invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, m, & p, at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \infty lx^3 + mmxx + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$. Atqui demonstratum est superiùs x majorem esse quàm l, ac proinde ll minus quam lx. Multò igitur magis xx majus erit quàm $ll + mm$, & x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4 + p^4}}$, $\sqrt{\sqrt{m^4 + p^4}}$, & $\sqrt{\sqrt{mmpp + p^4}}$.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + mmxx * - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - mmxx$, ideoque $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx, & $\frac{pp}{m}$ majus quàm x. Similiter est $x^4 + mmxx \infty p^4 - lx^3$, ac per consequens p major quàm x, & $ppxx$ majus quàm x^4, & $llpp$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$. Quare $ppxx + lpxx + mmxx$ majus erit quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{pp + lp + mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$. At verò existente $x^4 + lx^3 + mmxx \infty p^4$, erit quoque p^4 majus quàm lx^3, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$ majus quàm x. Inventa igitur est radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{pp + lp + mm}}$; at minor quàm $\frac{pp}{m}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major

jor

jor quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx \infty lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty mmxx - lx^3$, ideoque $\frac{mm}{l}$ majus quàm x. Deinde est $lx^3 + p^4 \infty mmxx - x^4$, ac proinde m major quàm x. Præterea est $x^4 + lx^3 \infty mmxx - p^4$, & consequenter xx majus quàm $\frac{p^4}{mm}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - mmxx * + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty mmxx - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, ipsam x quoque fore æqualem ipsi $\frac{pp}{m}$; & per consequens, si fuerint termini l & $\frac{pp}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis illorum; & si fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos constituta. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - mmxx \infty lx^3 - p^4$. Vnde similiter constat, si fuerit x æqualis ipsi m, fore quoque x æqualem ipsi $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$; ideoque si æquales fuerint m & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, una radicum æquationis propositæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter illos duos constituta. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + mmxx$, unde $lx^3 + mmxx$ majus erit quàm x^4, & $lx + mm$ majus quàm xx. Iam si fuerit æquatio proposita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m, & $l+m$ major quàm x. Quòd si fuerit x minor quàm m, multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4+p^4 \infty lx^3+mmxx$ etiam constat, quòd lx^3+mmxx majus est quàm p^4. Atqui inventa est $l+m$ major quàm x. Ergo $llxx+lmxx$ majus erit quàm lx^3, & $llxx+lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, ideoque xx majus quàm $\frac{p^4}{ll+lm+mm}$. Hinc cum $llxx+2lmxx+mmxx$ multò majus sit quàm p^4, erit quoque per consequens $lx+mx$ majus quàm pp, & x major quàm $\frac{pp}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{ll+lm+mm}}$ & $\frac{pp}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterùm quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m, eam fore inter hos terminos $l+m$ & m. Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x; quoniam lx^3+mmxx majus est quàm p^4, erit & $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{lm+mm}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

CAPVT IX.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum tertio termino carentium.

Prop. 1. $x^4-lx^3 * +n^3x-p^4 \infty 0$.

PEr transpositionem est $x^4-lx^3 \infty p^4-n^3x$. Vnde patet, quòd si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, radix æqua-

tionis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4, & divisâ æquatione per $x - l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l.

Prop. 2. $x^4 + lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty p^4 - lx^3$. Vnde constat, si x æqualis est ipsi n, fore quoque $x^3 \infty \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{C.\, \frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt{C.\, \frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3x - lx^3$. Vnde patet, si fuerit x æqualis ipsi p, fore quoque $xx \infty \frac{n^3}{l}$, hoc est, $x \infty \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 * - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty n^3x + p^4$, ideoque x major quàm l. Eodem modo est $x^4 - n^3x \infty lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n, & nx^3 majus quàm n^3x. Similiter est $x^4 - p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque x major quàm p, & px^3 majus quàm p^4. Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3x + p^4 \infty x^4$. Quare $lx^3 + nx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4, & $l+n+p$ major quàm x. Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l, n, & p, at minorem quàm $l+n+p$. Porrò ex hac æquatione $lx^3 + n^3x + p^4 \infty x^4$ etiam constat, quod $lx^3 + n^3x$ est minus quàm x^4 : & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x, erit l^3x minus quàm lx^3, ideoque $l^3x + n^3x$ multo minus quàm x^4, & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt{\sqrt{l^4+p^4}}$ & $\sqrt{\sqrt{ln^3+p^4}}$.

Pro-

Prop. 4. $x^4 + lx^3 * + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 \infty p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Eodem modo est $x^4 + n^3x \infty p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3. Similiter est $lx^3 + n^3x \infty p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x, & p^3x majus quàm x^4, ac $lppx$ majus quàm lx^3. Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3x \infty p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, & p.

Prop. 5. $x^4 - lx^3 * + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Deinde est $x^4 + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3x \infty lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \infty n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx, hoc est, x minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 \infty n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 \infty n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3, hoc est, x minor quàm n. Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum x æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 * - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \infty n^3x - p^4$. Vnde patet, si x æqualis est ipsi l, fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \infty p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x \infty lx^3 - p^4$. Vnde simili modo patet, si x æquatur ipsi n, ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt{C.}\,\frac{p^4}{l}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porrò per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3. Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l + n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l + n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \infty lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Atqui invenimus $l + n$ majorem esse quàm x, ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx, nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3. Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$. Et quandoquidem cubus ex $l + n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l + n$, ut & major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$, at minor quàm $l + n$. Præterea, quoniam $l + n$ major est quàm x, si fuerit x major

major quàm n, erit necessariò inter hos terminos $l+n$ & n. Quòd si verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x, quia $lx^3 + n^3x$ majus est quàm p^4, erit & $lnnx + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

CAPVT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Prop. I. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0.$

Per transpositionem est $lx^3 + n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4, & $lxx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3, hoc est, $l+n$ major quàm x, & x minor quàm n. Multò igitur magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x necessariò minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3 + n^3x \infty x^4 + mmxx + p^4$ constat, esse $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4. Sed inventa est $l+n$ major quàm x, ac per consequens $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx, & $l^3x + lnnx + 2lln x$ majus quàm lx^3. Quare erit $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus quàm p^4, & x major quàm $\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Inventus est itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicum æquationis propositæ, sive hæc duas sive quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ semper major est quàm x, si ponatur x quoque major quàm n; manifestum est eam esse inter duos terminos $l+n$ & n. Quòd si autem x fuerit æqualis vel minor quàm n, quoniam est $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4; erit $lnnx + n^3x$

majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{lnn + n^3}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, at minor quàm $l+n$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x + p^4 \infty lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x. Similiter est $x^4 + n^3x + p^4 \infty lx^3 - mmxx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + mmxx + p^4 \infty lx^3 - n^3x$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + mmxx + n^3x \infty lx^3 - p^4$, & consequenter x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $lx^3 + mmxx + n^3x \infty x^4 + p^4$, ideoque $lx^3 + mmxx + n^3x$ majus quàm x^4. Iam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + mx^3 + nx^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n$ major erit quàm x, & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n. Quare $l + m + n$ erit necessario major quàm x. Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m, erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l + m + n$ & m. Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n, etiam m sit æqualis vel major quàm x; erit & $lmmx + m^3x$

$+ n^3x$

$+ n^3 x$ æquale aut majus quàm $l x^3 + m m x x + n^3 x$, ac per consequens majus quàm p^4; ideoque x major quàm $\frac{p^4}{l m m + m^3 + n^3}$. Vnde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n, erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{p^4}{l m m + m^3 + n^3}$; & si n fuerit major quàm m, consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{l n n + m m n + n^3}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\frac{p^4}{l m m + m^3 + n^3}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n; aut majorem minore duorum n & $\frac{p^4}{l n n + m m n + n^3}$, si n major sit quàm m; at verò semper minorem quàm $l + m + n$.

Prop. 4. $x^4 - l x^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $l x^3 + m m x x \infty x^4 + n^3 x + p^4$, ideoque $l x^3 + m m x x$ majus quàm x^4, & $l x + m m$ majus quàm $x x$. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $l x + m x$ majus quàm $x x$, & $l + m$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm m. Ergo x necessariò minor erit quàm $l + m$. Vnde si fuerit x major quàm m, erit inter hosce terminos $l + m$ & m. Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m, quandoquidem & $l x^3 + m m x x$ majus est quàm p^4; erit $l m x x + m m x x$ majus quàm p^4; ideoque $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{l m + m m}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{l m + m m}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{l m + m m}}$, at minor quàm $l + m$.

Pro-

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis n^3x fore majus quàm x^4, ideoque n majorem quàm x; & n^3x majus quàm lx^3, ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx; & denique n^3x majus quàm p^4, & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $mmxx + n^3x \infty x^4 + lx^3 + p^4$, ideoque $mmxx + n^3x$ majus quàm x^4, & $mmx + n^3$ majus quàm x^3. Iam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n. Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^3, & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x; & multò magis, si fuerit x minor quàm n. Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ semper major quàm x, & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n, si major est quàm n. Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n, quoniam est $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, erit quoque $mmnx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mmn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 \infty 0$.

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto n^3x + p^4 - mmxx$, ideoque si fuerit $x^4 \propto lx^3$, erit $x \propto l$, & $ln^3 \propto n^3x$, & $n^3x + p^4 \propto mmxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \propto mmxx$, & $x \propto \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$. Vnde patet, si fuerit $l \propto \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm \propto ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$: ac idcirco, substituto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4, nempe $llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit quoque $n^3x + p^4$ majus quàm $mmxx$; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4, hoc est, l major quàm x, erit & $mmxx$ majus quàm $n^3x + p^4$. Iam quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel æqualis, vel major, vel minor quàm p. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm p, sitque major quàm l, quoniam tunc $n^3x + p^4$ quoque majus est quàm $mmxx$, erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm $mmxx$, & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x. Ergo in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quòd si autem x minori existente quàm l, ipsa sit æqualis vel major quàm p, quoniam & tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm $mmxx$, erit similiter $n^3x + p^3x$ minùs quàm $mmxx$, & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x. Igitur in hoc casu erit x minor quàm l, & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quare universaliter apparet, æquationem propositam non habere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cùm est $llmm \propto ln^3 + p^4$; modò quælibet radicum, sive unam, sive tres habuerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \infty p^4 - mmxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \infty lx^3$, hoc est, $x \infty l$, erit $mmxx \infty -n^3x + p^4$, & per consequens $mmxx \infty -n^3l + p^4$, & $xx \infty \frac{p^4 - ln^3}{mm}$, & $x \infty \sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$. Quòd si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$, hoc est, si fuerit $llmm \infty p^4 - ln^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - ln^3}{mm}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4, substituatur ejus valor, nempe $llmm + ln^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l. Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3, hoc est, x major quàm l, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x, erit etiam $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4. Iam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n. Esto igitur, quòd x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mmxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $mmnx + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{mmn + n^3}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm l, & minor quàm $\frac{p^4}{mmn + n^3}$. Quòd si x, cùm major est quàm l, minor fuerit quàm n, erit & p^4 majus quàm $mmxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $mmxx + nnxx$, & consequenter $\frac{p^4}{mm + nn}$ majus quàm xx, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$ major quàm x. Quare in hoc casu x erit major quàm l, & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Quòd si verò x, cùm minor est quàm l, vel æqualis fuerit vel major quàm n, erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4, ideoque $mmxx + nnxx$ majus quàm p^4, & xx majus quàm $\frac{p^4}{mm + nn}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm + nn}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l, & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Poſtremò, cùm x minor quàm l, etiam ipſa minor ſit quàm n, erit $mmxx+n^3x$ majus quàm p^4, & $mmnx+n^3x$ multò majus quàm p^4, & per conſequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc caſu, minor erit quàm l, & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita ſint, conſtat univerſaliter, æquationem propoſitam non habere niſi unam veram radicem, quæ æqualis eſt ipſi l, quando eſt $llmm \infty p^4 - ln^3$, modo unaquæque radicum, ſive unam tantùm, ſive tres habuerit, fuerit ſemper neceſſario inter maximum & minimum trium terminorum l, $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

Prop. 10. $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur, quòd x major eſt quàm l, m, n, & p. Deinde erit quoque per tranſpoſitionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, & per conſequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4, & $l + m + n + p$ major quàm x. Porrò, quoniam eſt $x^4 \infty lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major ſit quàm $lxx + mmx + n^3$, erit multo magis major quàm $l^3 + m^3 + n^3$, $l^3 + lmm + n^3$, & $2lmm + n^3$, & ſic de reliquis terminis, quos ſubſtituere licet loco x^3, minores quàm x^3. Sic x^4 majus eſt quàm $l^4 + m^4 + n^4$, quàm $m^4 + n^4 + p^4$, & ſic de reliquis. Præterea, quoniam x major eſt quàm n & p, & $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \infty x^4$, erit $lx^3 + mmxx + nnxx + ppxx$ majus quàm x^4, ideoque $lx + mm + nn + pp$ majus quàm xx aliquâ quantitate. quæ quidem quantitas, etiamſi ſit incognita, ſi appelletur zz, habebitur $lx + mm + nn + pp \infty xx + zz$. Quantitas autem hæc incognita zz neceſſariò minor erit quàm $mm + nn + pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex pri-

ma & majori ex secunda, esset reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx. Quod foret absurdum, quandoquidem x demonstrata est major quàm l. Quare habemus hanc æquationem $xx \infty lx + mm + nn + pp - zz$, quæ erit realis, eritque $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifestum verò est, quòd $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp$ majus est quàm $\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp - zz$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x, ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x; ita ut radix propositæ æquationis necessariò sit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. 11. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 - mmxx \infty p^4 - n^3x$. Vnde, si fuerit $x^4 - lx^3 - mmxx \infty 0$, hoc est, omnibus per xx divisis, $xx - lx - mm \infty 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \infty 0$. Hoc est, si fuerit $xx \infty lx + mm$, vel $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \infty n^3x$, vel $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Quare constat, si fuerit $\frac{p^4}{n^3} \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x, hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Iam existente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \infty lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si vocetur zz: habebitur $xx \infty lx + mm + zz$, & $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + zz}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mmxx$, hoc est, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc existente xx minori quàm $lx + mm$, erit

erit $xx \infty lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur zz, habebitur $xx \infty lx + mm - zz$, hoc est, $x \infty \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin secus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$.

Per transpositionem est $x^4 - p^4 \infty n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque si fuerit $x \infty p$, erit quoque $n^3x \infty lx^3 + mmxx$, & $x \infty \frac{n^3}{lp + mm}$. Vnde constat, si $lpp + mmp$ æquetur n^3, radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm p^4, hoc est, x major quàm p, erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Iam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m. Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m, & eadem quantitas x etiam major sit quàm p, quandoquidem & tunc n^3x majus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{lm + mm}$ majus quàm x. Quare in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m, erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx. Ergo in hoc casu erit x major quàm p, & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p, ipsa sit major quàm m, vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus est quàm $lx + mmxx$, erit n^3x

minor quàm $lx^3 + mx^3$, hoc eſt, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc caſu erit x minor quàm p, & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cùm fuerit x minor quàm p, & ipſa etiam minor quàm m, quoniam & tunc $n^3 x$ minus eſt quàm $lx^3 + mmxx$, erit $n^3 x$ minus quàm $lmxx + mmxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Vnde conſtat univerſaliter, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cùm eſt $lpp + mmp$ æquale ipſi n^3; ſed cùm inæquales ſunt, eſſe radicem æquationis propoſitæ neceſſariò inter majorem & minorem terminorum p, $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mmxx + n^3 x - p^4 \infty 0$.

Factis neceſſariis tranſpoſitionibus, demonſtrabitur x fore minorem quàm p, $\sqrt{C.\frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + mmp + n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3 x - p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4 - n^3 x \infty mmxx + p^4 - lx^3$; ideoque ſi fuerit $x^4 \infty n^3 x$, hoc eſt, $x \infty n$, erit $mmxx + p^4 \infty lx^3$, hoc eſt, $\frac{mmnn+p^4}{l} \infty x^3$. Quòd ſi fuerit x major quàm n, erit & $mmxx + p^4$ majus quàm lx^3: ſin minor fuerit, erit $mmxx + p^4$ minus quàm lx^3. Iam, ſi x major eſt quàm n, & etiam vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, multo magis erit $mmxx + ppxx$ majus quàm lx^3, hoc eſt, $\frac{mm+pp}{l}$ majus quàm x. Ergo in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd ſi x major fuerit quàm n, & etiam minor quàm p, quoniam & tunc $mmxx + p^4$ majus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp + p^4$ majus quàm lx^3, hoc eſt, x^3 minor quàm $\frac{mmpp+p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Quare

Quare in hoc caſu erit x major quàm n, & minor quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd ſi x minor fuerit quàm n, & vel æqualis vel major quàm p, quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus eſt quàm lx^3, erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3, & x major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc caſu erit x minor quàm n, & major quàm $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd ſi verò x minor fuerit quàm n, & ipſa etiam minor ſit quàm p, quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor eſt quàm lx^3; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3, & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x. Quare in hoc caſu, erit x minor quàm n, & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Vnde univerſaliter apparet, radicem æquationis propoſitæ neceſſariò eſſe inter maximum & minimum trium terminorum n, $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C.\frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4+lx^3-mmxx+n^3x-p^4 \infty 0$.

Per tranſpoſitionem eſt $x^4+lx^3-mmxx \infty p^4-n^3x$; ideoque ſi fuerit $x^4+lx^3-mmxx \infty 0$, ſeu, diviſis omnibus terminis per xx, $xx+lx-mm \infty 0$; erit quoque $p^4-n^3x \infty 0$, hoc eſt, ſi eſt $xx \infty -lx+mm$, vel $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$ erit $p^4 \infty n^3x$, ſeu $x \infty \frac{p^4}{n^3}$. Vnde patet, ſi $\frac{p^4}{n^3}$ eſt æquale ipſi $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$, radicem æquationis propoſitæ eſſe æqualem ſingulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd ſi fuerit x^4+lx^3 majus quàm $mmxx$, hoc eſt, $xx+lx$ majus quàm mm, erit quoque p^4 majus quàm n^3x, hoc eſt, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x. Ac proinde cum $xx+lx$ majus ſit quàm mm, erit $xx+lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licèt ſit incognita, vocetur zz, eritque $xx+lx \infty mm+zz$, ſeu $xx \infty -lx+mm+zz$, hoc eſt, $x \infty -\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm+zz}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Ergo in hoc caſu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+mm}$. Quòd ſi fuerit x^4+lx^3 minus

nus quàm $mmxx$, hoc est, $xx + lx$ minus quàm mm, erit quoque p^4 minus quàm $n^3 x$, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus sit quàm mm, erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz, eritque $xx + lx + zz \infty mm$, vel $xx \infty -lx + mm - zz$, hoc est, $x \infty -\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perspicuum est, cùm $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ æqualem esse singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; sin minus, quamlibet radicum, sive unam tantùm, sive tres habuerit, necessariò esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

FINIS.

JOHANNIS DE WITT

ELEMENTA

CVRVARVM LINEARVM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN, in Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris.



AMSTELODAMI,

Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.

Sumptibus Societatis.

Clarissimo, Doctissimoque Viro,

D°. FRANCISCO à SCHOOTEN,

IOHANNES DE WITT

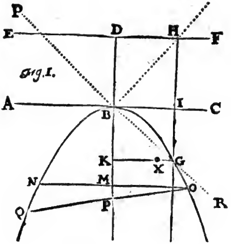
S. P. D.

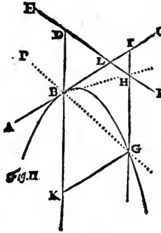
Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem judicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui, ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quælibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, pleniùs planiúsque à Recentioribus ostensum est; Adeò ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac proinde

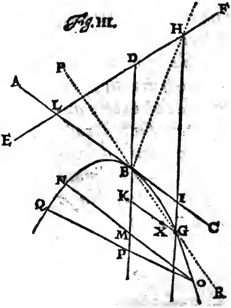
inde de iisdem vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum & ineptum semper existimavi. At verò cum cæterarum linearum curvarum Elementa, prout a Veteribus tradita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentiùs considerassem, originem earum è solido peti atque inde ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Mathematicis quam maximè observandus est, omnino contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem de causa & propter varias rationum compositiones, quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Propositionum serie Lectoribus tædio memoriæque oneri esse judicavi. Atque eâ quidem contemplatione excitatus jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animadverti, non eas solùm, quas vulgò Coni sectiones *appellarunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujuscunque sint generis, multipliciter quidem ex varia corporum diversimodè compositorum aut figuratorum sectione gigni, at verò earundem singulas infinitis quoque modis in plano generari, ipsarum autem naturam & proprietates ex ea generatione multò faciliùs quàm ex corporum sectione deduci, ac firmiter mihi persuasum habeo, nullam aliam esse causam, quod*

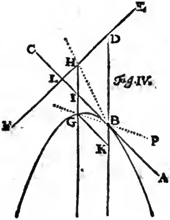
linea-

linearum curvarum secundi generis ulteriorumque graduum ortus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta specierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac demonstrata sint, quam quòd tam in tractatione ortus & generationis, quam in demonstratione essentiæ ac proprietatum linearum curvarum primi generis à naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cum earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè & quidem diversimodè generantur, intellectum & imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi generis quasi sponte ducat. Cumque eorum; quæ antehac, dum per otium licuit, eò spectantia meditatus sum, tu nunc amicissime Schooteni, *copiam tibi fieri desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satisfacio, quæque de eodem argumento a me quondam conscripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi mitto, tuique omnino juris facio, cætera autem; quæ sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id ferent negotia, recolligam, debitoque ordine conjungam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore tibi missurus, Vale. Hagæ Com.* VIII *Octobr. Anni* M. DC. LVIII.


Fig. I.
P
E
D
H
F
A
B
I
C
K
X
G
N
M
O
R
Q
P


E
D
I
C
P
L
H
F
B
A
G
Fig. II
K


Fig. III.
H
F
D
P
A
L
E
B
N
K
I
Q
X
G
C
M
P
O
R


E
D
C
H
L
Fig. IV.
I
F
G
B
P
K
A

JOHANNIS DE WITT ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER PRIMVS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crus unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea; recta, quæ, utl prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *deſcribens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *deſcribentis* pars, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus *anguli mobilis*, quod *deſcribens* ſecum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò crus, quod à *deſcribente* ſecatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

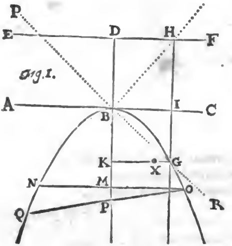
Cum *deſcribens* per *Polum* tranſit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, eſſe tam *deſcribentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *ſtatione prima* conſtitutum dicemus; ac quoties de iis ſimpliciter ſermo erit in tali ipſas poſitione conſiderabimus,

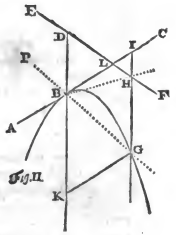
X.

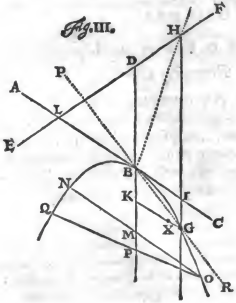
Quamlibet curvam, interſectione, uti prædictum eſt, in plano genitam, deſcriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* conſideratis, ut exhibentur ac ſibi invicem junguntur *in ſtatione prima*; adeò ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipſa *deſcribente* quàm cum *crure patiente* in eadem ſtatione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque conſtituat.

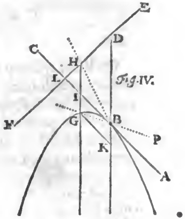
Ut

Vt in appositis figuris, si recta H G sibi semper parallela certo sui puncto, puta H, moveri concipiatur per immotam E F, eodemque illo motu secum ducere crus B H anguli H B G, circu-









lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva linea BG: erunt

HG *describens.*
EF *directrix.*
HBG, HBP *anguli mobiles.*
FHG, EHG *anguli ad directricem.*
B *Polus.*
BD *intervallum.*
BH *crus patiens.*
BG *crus efficiens.*
PG *linea efficiens.*
DK *describens in statione prima*, sive *describens* simpliciter.
DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima.*
AC *efficiens in statione prima*, sive *efficiens* simpliciter.

Curvam BG, *efficiente* AC, *intervallo* verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cùm *efficiens* PG est in statione AC, *crus patiens* BH coïncidere cum *intervallo* BD; ac *describentem* HG tunc esse in statione DK, atque per *efficientem* & *intervallum* constitui utrinque *angulos mobiles* DBC, DBA.

THEOREMA I.

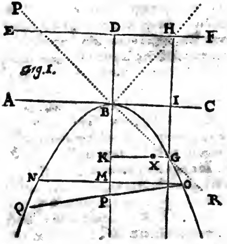
Propositio I.

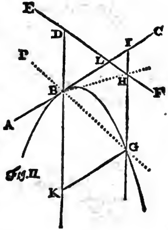
Quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo*, si *anguli mobiles* æquales sint iis, qui *ad directricem* sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quævis recta à quolibet curvæ puncto ad *describentem efficienti* æquidistans applicata possit rectangulum, sub *intervallo* atque ea *describentis* parte, quæ inter *Polum* & applicatam intercipitur, contentum.

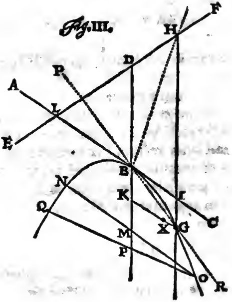
Sit *efficiente* ABC, *intervallo* BD, & *directrice* EF descripta curva BG; ita ut *angulus mobilis* DBA sit æqualis angulo EDB *ad directricem*, sitque à puncto G in curva utcunque assumpto ad *describentem* DBK applicata recta GK *efficienti* AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

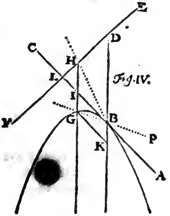
Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is









qui ad *directricem* eſt rectus ſit, uti in prima figura, erit [1] ut H I ad I B, ita I B ad I G, id eſt [2], ut D B ad G K, ita G K ad B K. ac proinde [3] quadratum rectæ G K rectangulo D B K æquale erit.

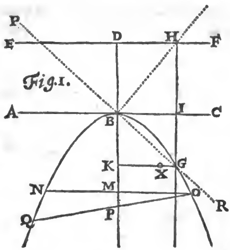
At verò ſi obliquus fuerit uterque angulorum A B D, E D B, uti in cæteris figuris, ſecabunt ſeſe *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* eſt, acuti erunt. ſit itaque ipſarum interſectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli L B D, L D B, ex conſtructione, quàm L I H, L H I, propter parallelas D B, H I, æquales ſunt [4]; erunt quoque [5] tam lineæ L D, L B, quàm L H, L I; ac proinde & compoſitæ [a] vel reſiduæ [b] D H, B I æquales. Cum autem, angulis D B I, H B G iiſdem, ſive æqualibus exiſtentibus, addito [c], vel ablato [d] communi angulo H B I, angulus D B H angulo I B G, id eſt [6], B G K, fiat æqualis, atque angulus B D H ex conſtructione angulo D B I, id eſt [7], B K G, ſit æqualis: erunt [8] triangula B D H, G K B æquiangula, eritque proinde [9], ut B D ad D H ſive B I, hoc eſt [10], ad G K, ita eadem G K ad K B. quare, ut ſupra [11], quadratum applicatæ G K rectangulo D B K æquale erit. Quod eſt propoſitum.

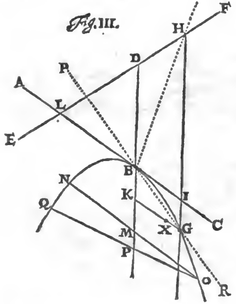
[1] per Cor. 8 ſexti Eucl. [2] per 34 primi. [3] per 17 ſexti. [4] per 29 primi. [5] per 6 primi. [a] in caſu fig. II & ſimilibus. [b] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus. [c] in caſu fig. II. & ſim. [d] in caſib. fig. III & IV, aut ſimilibus. [6] per 29 primi. [7] per 29 primi. [8] per 32 primi. [9] per 4 ſexti. [10] per 34 primi. [11] per 17 ſexti.

Conſtat itaque, curvam interſectione, uti prædictum eſt, deſcriptam, eam ipſam eſſe, quæ Veteribus Parabola; *Polumque* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *deſcribentem in ſtatione prima* eandem quæ diameter, aut ſi *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum ſive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametr[illegible] vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retinento.

Corollarium I.

Cum *deſcribentis efficientisque* interſectio quibuſcunque ſtationibus in uno tantùm puncto fiat, manifeſtum eſt, *deſcribentem* in quacunque





cunque ſtatione, id eſt, rectas omnes diametro æquidiſtantes, in uno tantùm puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo *deſcribentis* à *Polo* receſſu major majorque ſemper fiat angulus, quem *crus efficiens* conſtituit ad *lineam efficientem in ſtatione prima*, veluti G B I, manifeſtum eſt, quamlibet rectam à *Polo* ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., B G, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

Corollarium 3.

Conſtat præterea angulum G B K indefinitè quidem diminui, omnique propoſito angulo rectilineo minorem reddi poſſe; ſed *crus* tamen *efficiens* B G nunquam cum *deſcribente* B K coincidere, multò minùs ipſam tranſire: ad hoc enim neceſſum foret, ut *crus patiens*

BH *directrici* EF foret parallelum [1], aut certè ut caderet infra eam, quæ à *Polo directrici* æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum *directricem* semper secet.

[1] per 29 primi.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac *crus efficiens* BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKX [2], per Parabolam transeat in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occursura est [3], aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu prius Parabolæ occurret [4].

[2] juxta Cor. præcedens. [3] per Corol. 2 hujus. [4] per Cor. 2 hujus.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Vt, si ducta sit applicata NMO, quoniam [5] tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

[5] per 1 hujus.

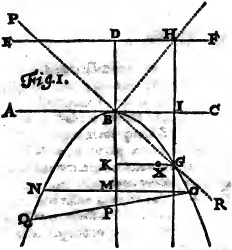
Corollarium 6.

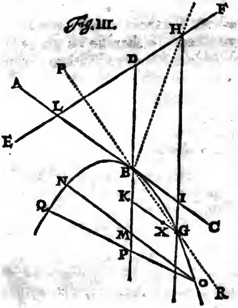
Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ *efficienti* æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON *efficienti* AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M[6], foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque [7] ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest [8].

[6] per Corol. præcedens. [7] per 2 sexti. [8] juxta Corol. 1 hujus.

Itaque non solùm applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad ean-

eandem ordinatim applicatæ ſunt: & ſi diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat omnes quoque ipſi æquidiſtantes bifariam ſecabit.





Corollarium 7.

Ex demonſtratis quoque facilè colligitur, applicatarum quadrata ad ſe invicem eſſe, ſicut ad ſe invicem ſunt diametri portiones inter verticem & applicatas interceptæ. Vt, ſi applicatæ ſint G K, N M, erit [1] quadratum rectæ G K ad quadratum ipſius N M, ut rectangulum D B K ad rectangulum D B M, id eſt [2], ut B K ad B M.

[1] per 1 hujus.

[2] per 1 ſexti.

Corollarium 8.

Ex ipſa porrò deſcriptione manifeſtum eſt, *efficientem in ſtatione prima*, id eſt, rectam, quæ per *Polum* ſive verticem applicatis æquidiſtans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem ſecare.

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione B G, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut G B C: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* A B C cadet.

Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., P R, angulum constituit cum *efficiente* A C, ut R B C, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta B H, ita ut eidem angulo R B C æqualis sit angulus D B H, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut H G: erit ea ipsa *describens*, & H B R *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* D B C; B R verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum H G, B R intersectio G in Parabola. Quare cum recta P R non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota B G recta [3] intra curvam cadat, non continget recta P R Parabolam, sed eandem secabit.

[3] per Corol. 1 hujus.

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit B K, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens B D, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ A B K vel C B K: oportet, ductâ per D. lateris recti termi-

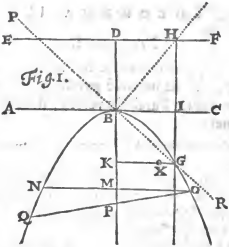


Fig. I.

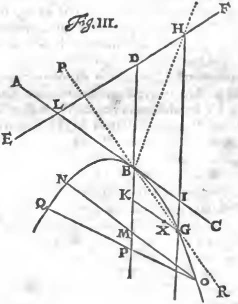


Fig. III.

terminum rectâ E D F in angulo E D B ipsi A B D æquali, *efficiente* A C, & *intervallo* B D, ad *directricem* E F curvam describere, ut N B G: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per assumptum utcunque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoquè assumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

Sit Parabola quælibet H A M, cujus axis diameterve A B, & latus rectum ad eandem pertinens A C; sitque per punctum M, in curva utcunque assumptum, ducta recta M O, axi sive diametro A B parallela: dico assumptum quoque punctum M verticem, dictamque M O diametrum esse; imò si ductâ, per M rectâ S V, ita ut ab axe sive diametro A B extra Parabolam abscindat portionem A I æqualem A B, quæ inter verticem A & applicatam M B intercipitur; productâque O M ad K, ita ut sit M K ipsis A B vel A I & I M tertia proportionalis, *efficiente* S V, *intervallo* verò M K Parabola describatur: dico hanc cum exposita Parabola H A M eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non solùm M O diametrum, atque M verticem fore, sed & M K latus rectum esse ad dictam diametrum M O pertinens, & S V Parabolam in vertice M contingere, omnesque ipsi parallelas in Parabola ductas ab M O bifariam dividi, atque ad hanc ipsam M O ordinatim applicari.

Sit enim in exposita Parabola H A M assumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex. gr., H; sitque ab eodem ducta H G ad axem sive diametrum A B ordinatim applicata, nec non H O ipsi S V æquidistans, quarum prior, si opùs fuerit producta, rectæ K O occurrat in E; posterior verò, itidem producta, ubi opùs fuerit, prædictum axem sive diametrum A B secet in D. Et apparet [1], si quadratum rectæ H O æquale sit rectangulo K M O, Parabolam, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K describetur, per punctum quoque H transituram. Esse autem quadratum rectæ H O æquale rectangulo K M O multifariam id quidem, &, meo saltem judicio, breviter simpliciterque satis in eum qui sequitur modum demonstratur.

Quoniam est [2] ut C A ad M B, ita M B ad B A, erit, duplicatis

[1] ex 1 hujus.

[2] per 1 hujus, & 17 sexti.

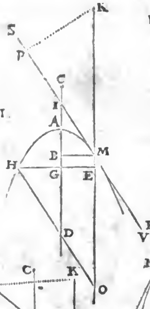


Fig. I.

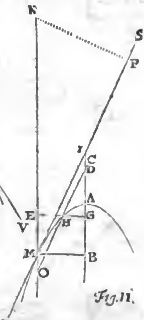


Fig. II.

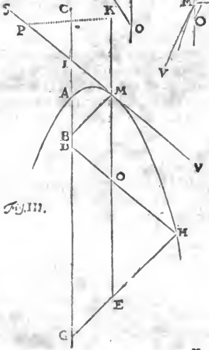


Fig. III.

catis consequentibus, ut C A ad duplam M B seu ad G E bis, ita M B ad B I, hoc est [3], ita H G ad G D: ac proinde [4] contentum sub mediis, nempe rectangulum H G E bis, æquale contento sub extremis, nimirum rectangulo sub C A & G D. Vnde cum bina quadrata rectarum H G & B M seu G E æqualia sint [5] binis rectangulis C A G & C A B seu C A I, id est [6], rectangulo sub C A & I G: erunt quoque, additis [a] demptisve [b] utrinque æqualibus, nimirum rectangulo H G E bis ab una, ac rectangulo sub C A & G D ab altera parte [7], composita [a] vel residua [b], nempe quadratum E H ac rectangulum sub C A & I D seu M O æqualia [c].

[3] per 29 primi, & 4 sexti. [4] per 16 sexti. [5] per 1 hujus. [6] per 1 secundi. [a] in casu fig. I & similibus. [b] in casu fig. II & III ac similibus. [7] *quippe per supra demonstrata rectangulum* H G E *bis æquale est rectangulo sub* C A & G D. [c] in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum H G & G E addatur rectangulum H G E bis, compositum fit E H quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte ad rectangulum sub C A & I G addatur rectangulum sub C A & G D, fit, per I secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis quadratis rectarum H G & G E auferatur rectangulum H G E bis, residuum erit, per 7 secundi, E H quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub C A & I G auferatur rectangulum sub C A & G D residuum erit, per 1 secundi, rectangulum sub C A & I D seu M O.

Ideoque cum sit ut B M quadratum ad M I quadratum, sive ut C A B rectangulum [8] ad rectangulum sub K M & A B [9], hoc est [10], ut C A ad K M, seu, assumptâ communi altitudine M O, ut prædictum rectangulum sub C A & M O ad K M O rectangulum, ita [11] E H quadratum ad H O quadratum; sitque rectangulum sub C A & M O, ut jam ostensum est, æquale quadrato E H: erit quoque [12] rectangulum K M O quadrato H O æquale.

Vnde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola A H assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ *efficiente* S V, *intervallo* verò M K describitur: sequitur alteram alteri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

[8] per 1 hujus, & ex hypothesi. [9] per 17 sexti, & ex hypothesi. [10] per 1 sexti. [11] per 4 & 22 sexti. [12] per 14 quinti.

Corollarium 1.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis quibuslibet rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium

quo-

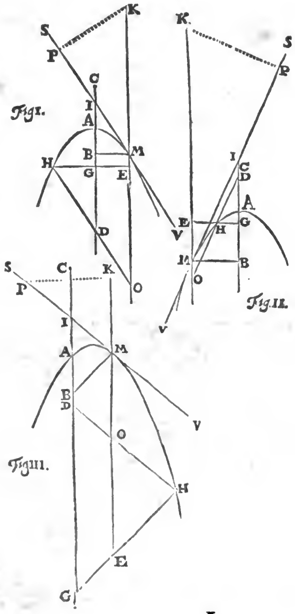


Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [1]. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuſlibet Parabolæ diametrum ſimulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

[1] per conclusionem 6 Cor. 1 hujus.

Corollarium 2.

Patetque porrò, quaſlibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abſcindere; &, vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abſcindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim S V, ex eo quòd æquales ſint A I, A B, Parabolam in puncto M utcunque aſſumpto contingere, nunc [2] demonſtratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere poſſe, ſuperiùs [3] oſtenſum eſt.

[2] in 2 hujus.
[3] per 9 Cor. 1 hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim [4] diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, ſi in ejuſdem diametri termino ſit datum punctum, notum nunc eſt [5] rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidiſtantem, Parabolam ibidem contingere. At ſi alibi in curva ſit punctum datum, veluti M, ſitque inventa diameter A D: oportet, ductâ ex M rectâ M B ipſi A D applicatâ, ſumptâque A I ipſi A B æquali, ducere rectam per I & M. Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I: oportet, factâ A B ipſi A I æquali, atque B M ordinatim ad A D applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M, ducere rurſus rectam per I & M. At verò ſi neque in curva neque in diametro producta detur, ut, ſi inventa diameter ſit M O, datumque punctum I: oportet, ductâ I D diametro M O parallelâ, quæ Parabolam ſecet in A, ſumptâque A B ipſi A I æquali, atque ex B ductâ B M ordinatim ad A D applicatâ, nimirum, quæ æquidiſtans ſit contingenti in A, Parabolæque occurrat in M, ducere iterum rectam per I & M. quippe conſtat ex antedictis [6], ipſam I M omni caſu Parabolam contingere in puncto M.

[4] per 1 Corol. 2 hujus.
[5] per 8 & 9 Corol. 1 hujus.
[6] per 2 hujus, ejuſque Cor. 2.

Co-

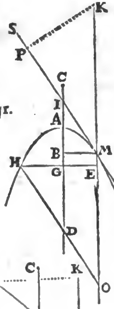


Fig I.

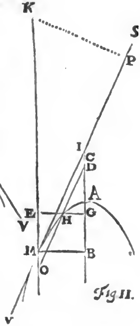


Fig II.

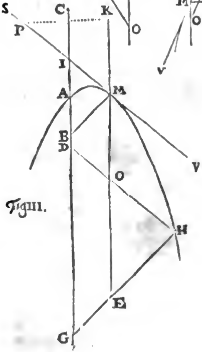


Fig III.

Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est [1], rectam M K, ex eo quòd ipsis A I, I M tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri M O parametrum esse.

[1] in 2 hujus.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituant, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro M O, vertice M, & latere recto M K, anguloque S M K vel V M K, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum M O, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituant æqualem dato cuilibet angulo A B M: ducatur à termino K ad S V recta K P in angulo K P V ipsi dato A B M æquali, divisâque P M bifariam in I ducatur per I recta I B ipsi M O æquidistans. Deinde ab M ad eandem I B applicetur recta M B in angulo M B I dato angulo æquali, divisâque B I bifariam in A, erit quæsita diameter A B, vertex punctum A, ejusque parameter A C, recta nempe, quæ ipsis A B, B M tertia proportionalis existit. Est enim [2] punctum M in Parabola, quæ *efficiente* ipsi B M parallelâ ac *intervallo* A C describitur, quandoquidem quadratum applicatæ B M ex constructione [3] rectangulo C A B est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula B I M & P M K, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M [4] (ob parallelas A D, M O) erit [5] ut B I ad I M, ita P M ad M K. &, sumptis antecedentium dimidiis, ut A I ad I M, ita I M ad M K. Quare secundùm ea quæ superiùs [6] demonstrata sunt, Parabolæ diametris A B, M O, ac parametris A C, M K,

[2] per 1 hujus.
[3] per 17 sexti.
[4] per 29 primi.
[5] per 4 sexti.
[6] in 2 hujus.

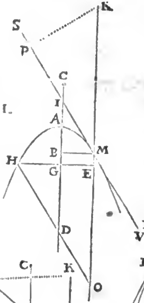


Fig. I.

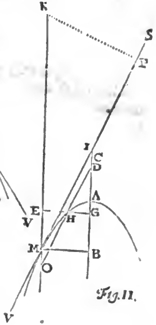


Fig. II.

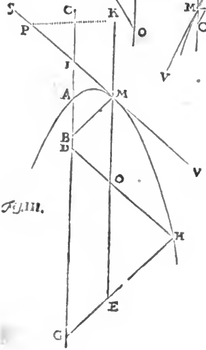


Fig. III.

MK, in dictis angulis descriptæ omnino eædem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quòd si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiamsi curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciorem judicem; cujusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositurus eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inhærere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctiùs appareat atque expeditiùs demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, eam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & intersectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis elucescet.

CAPUT II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immotæ rectæ lineæ applicatum, per eandem immotam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædicta recta circulariter mota semper per idem applicati cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur, appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen retinebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est deinceps, similiter & hîc *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quòd à *describente* per *directricem* promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à describente secatur, *Crus efficiens*, & per anguli verticem productum *Linea efficiens* appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficienti* parallela est ac proinde nulla ipsarum intersectio existit, tam *efficientem* quàm *describentem* in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione considerabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *describentem* interjacet, quàm eam *describentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Vt in apposita figura, si recta A B C [a] circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque suo promovere & secum ducere angulum B E C [a]; ita ut crus E B semper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ K L, ac prædicta A B C mobilis semper transeat per idem punctum cruris E B, ex. gr., per B, simulque alterius cruris E C & dictæ lineæ A B C intersectione C describatur curva linea *c* C, sitque ducta A D cruri E C parallela: apparet, quò magis recta A B C ad ipsam A D accedit, eò minorem fieri angulum E C B. ac tandem cùm ipsa A B C pervenit ad A D, ita ut cum ipsa coincidat, eundem angulum E C B tunc penitus evanescere: cum A D, ac proinde & dicta A B C, statione illâ, cruri E C parallela sit; ita ut tunc dictum crus E C sive recta C E M eadem sit cum linea G F H, nimirum suppositâ D F ipsi B E, æquali, eruntque

[a] quæ quidem recta A B C, ut & angulus B E C in figura quatuor distinctis stationibus exhibentur.

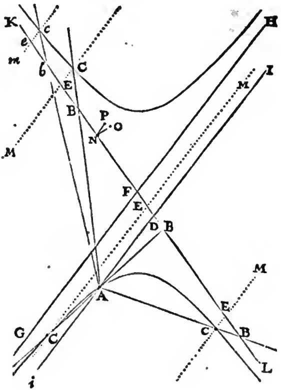
A B C *describens* in stationibus diversis.
K L *directrix.*
B E C, B E M, sive D F H & D F G *anguli mobiles.*
A *Polus.*
E B *crus patiens.*
E C *crus efficiens.*
M C *linea efficiens.*
G F H *efficiens in statione prima*, seu *efficiens* simpliciter.
A D I *describens in statione prima*, seu *describens* simpliciter.
E B seu F D & A D utrumque *intervallum.*

THEOREMA III.

Propositio 3.

Quibuslibet *angulis mobilibus* ac quibuscunque *intervallis*, juxta definitiones præmissas descriptâ curvâ, hoc ipsi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum sub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* intercipitur, æquale sit ei, quod sub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet *angulo mobili* B E C, & quibuscunque *intervallis* E B, seu F D & A D, *directrice* K D L, descripta curva *c* C; ita ut *efficiens* sit G F H, sitque à puncto C in curva utcunque assumpto ad *directricem* ducta C E *efficienti* G F H, ac proinde & *intervallo* A D parallela: dico rectangulum F E C æquale esse A D F rectangulo, sive ei, quod sub A D, E B continetur.

 Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione uti fuêre, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est punctum C, veluti in B E C, & A B C, quoniam æquales sunt rectæ E B, F D, additâ vel ablatâ utrinque F B vel E D: erunt quoque rectæ B D, F E æquales; cumque [1] propter parallelas E C, A D æquiangula sint triangula B D A, B E C: erit [2] ut B D, id est, F E, ad D A, ita B E ad E C: ideoque [3] rectangulum F E C sub extremis æquale rectangulo sub mediis A D, E B seu A D F. Quod erat propositum.

[1] per 29 primi. [2] per 4 sexti. [3] per 16 sexti.

Quare cum & omnia rectangula, ut F E C, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul considerES, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixêre: *directricem* verò K L ac *efficientem* G H eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive intersectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superiùs [4] expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallis* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

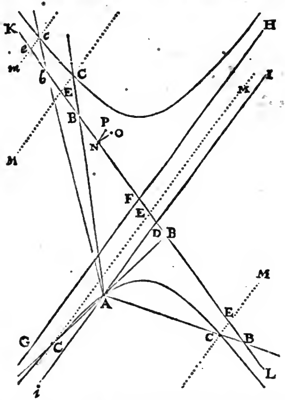
[4] in Epistola ad Schotenum.

Corollarium 1.

Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantiâ minorem; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta N O, ad Asymptoton F K perpendicularis. Sumptâ igitur N P, quæ eâdem N O minor sit, si fiat ut N P ad A D, ita D F ad F *e*, ac per *e* ducatur *e c* ipsi N P æqualis atque Asymptoto F H æquidistans: erit [5] rectangulum F *e c* Potentiæ A D F æqua-

[5] per 16 sexti.

æquale, ideoque juxta ea, quæ[6] demonstrata sunt, punctum C in Hyperbola. Est autem & *c e* ipsi P N æqualis, hoc est, datâ di- *6 in 3 hujus.*



stantiâ N O minor. Quare & perpendicularis à puncto *c* ad Asymptoton F K ducta, id est, distantia Hyperbolæ à prædicta Asymptoto, ibidem datâ distantiâ N O multò minor erit.

Corollarium 2.

Atque ita simul apparet, rectas omnes, quæ ductæ ex quolibet puncto intra angulum, qui ad verticem est ei, qui Hyperbolam continet, per centrum transeunt, vel Asymptotorum alterutram secant, Hyperbolæ tandem occurrere, productasque eandem, & in

in uno tantùm puncto, secare: quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

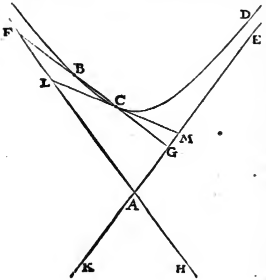
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantùm puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis intersecent.

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF, ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-



Asymptotorum alterutri parallela esset, aut, si vel huic vel illi Asymptoto extra angulum E A F occurreret, ex puncto intra angulum K A H ad verticem ei qui Hyperbolam continet ducta hanc vel illam Asymptoton secaret; ideoque [1] curvæ in uno tantùm puncto non verò in duobus occurreret, ac producta eandem secaret, non autem utrinque extra Hyperbolam caderet, contra id quod ponitur. Ac proinde constat propositum.

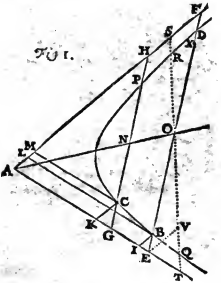
[1] per 2 & 3 Cor. 3 hujus.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Assumptis, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis, duobus utcunque punctis, ductisque per eadem sive unâ rectâ sive duabus, sibi mutuò parallelis: erunt rectangula sub ductæ vel ductarum partibus, Hyperbolâ & Asymptoto utrinque interceptis, sibi invicem æqualia.

Fig. I.



Sint, vel in eadem, vel in oppositis Hyperbolis B P C D, cujus Asymptoti A E, A F, assumpta utcunque bina puncta B & C, ac per eadem ductæ binæ rectæ B D, C P sibi invicem [a] parallelæ Asymptotisque occurrentes in punctis E, F, G, H [a]: dico rectangulum E B F rectangulo G C H æquale esse.

Ductis enim per eadem puncta B & C rectis, utrique Asymptoto parallelis alteraque Asymptoto terminatis, B I, B L, C K, C M: erit [1], propter rectangula I B L & K C M [2] æqualia, ut I B ad K C, hoc est [3], ut E B ad

[a] qui utique occursus in casu primæ figuræ fit intra angulum E A F, per 4 hujus.

[1] per 16 sexti.

[2] per 3 hujus.

[3] per 29 primi, & 4 sexti.

[4] per 16 sexti. ad G C, ita C M ad B L, id est, ita C H ad B F. ac proinde [4] rectangula E B F & G C H æqualia sunt. Quod demonstrandum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur B D, quæ utrique Asymptoto occurrat in punctis E & F[a], rectangula E B F, F D E sibi invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum transeat, ut C P in tertia figura, eâdem demonstratione comprobatum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqualia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ. Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ utcunque veluti C G P in eadem figura, eidem ubivis alia recta æquidistans ducatur B D, quæ secet Asymptotos in E & F, rectangulum E B F vel F D E quadrato G C itemque & G P quadrato æquale esse: sequitur, ipsas quoque G C, G P esse sibi invicem æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque, sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & Asymptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

Ductâ enim utcunque B D, quæ Asymptotis occurrat in E & F, cum ex antedictis [5] B F sit ad D F, ut D E ad B E: erit quoque dividendo [6], vel, in oppositis Hyperbolis, componendo [7], B D ad D F, ut eadem B D ad B E, ideoque D F, B E [8], ac proinde & B F, D E sibi invicem æquales erunt.

[5] per 5 hujus, & 16 sexti.
[6] per 17 quinti.
[7] per 18 quinti.
[8] per 9 quinti.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio sui

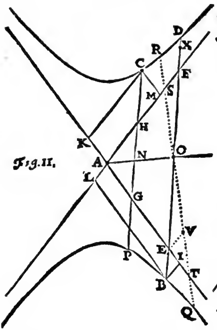


Fig. II.

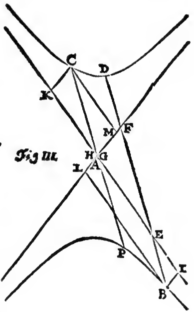


Fig. III.

ſui puncto in Hyperbola eſſe. Si enim præter D & B aliud quoddam ipſius D B punctum, ex.gr. X, in Hyperbola foret, eſſet [1] X F ipſi B E ac proinde & ipſi D F æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum.

[1] per Coroll. præced.

Corollarium 4.

Facilè autem apparet, & converſum quoque propoſitionis verum eſſe: nempe, ſi, iiſdem poſitis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola ſit, & alterum quoque fore in eadem vel oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt A E & A F. Ex eo enim quòd æqualia ſint rectangula E B F & G C H, demonſtrabitur æqualia quoque eſſe rectangula A I B & A K C eâdem methodo, quâ converſum ſupra oſtenſum fuit. ideoque ſi punctum B ſit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum C in eadem aut in oppoſita Hyperbola, cujus Aſymptoti ſunt A E, A F, & vice verſâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum eſto; imò & idem erit in eadem linea, ſi dicta

[2] per 3 hujus.

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF, ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale erit.

Corollarium. 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP; cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptisvè æqualibus [1] PH, CG, æquales quoque sint NH, NG, ideoque & OE, OF [2]: erunt similiter, demptis rursum additisvè æqualibus [3] BE, DF, ipsæ OB & OD quoque æquales.

Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ [4], interceptæ diametri, seu diametri simpliciter; at quæ à cento inter oppositas Hyperbolas ducuntur [5], secundæ diametri; parallelæ verò per easdem bifariam sectæ [6], ordinatim ad diametros applicatæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à diametris secentur, eædem diametri Hyperbolæ axes appellantur. Quando autem secunda diameter ordinatim ad interceptam diametrum applicatis parallela est, altera alteri *Conjugata* dicitur.

[1] per 2 Cor. 5 hujus.
[2] per 9 quinti, & 4 sexti.
[3] per 2 Cor. 5 hujus.
[4] ut AO similesque in I figura.
[5] ut AO similesque in II figura.
[6] ut PC, DB in utraque figura.

Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam secari. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S & T; & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis occurrens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO [4], quàm TO, SO [5]. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelâ [6], æqui-

[4] per 2, & 5 Cor. 5 hujus.
[5] ex hypoth. juncto Cor. 5 hujus. [6] per 15 & 29 Primi.

Fig. I.

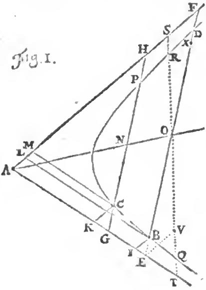
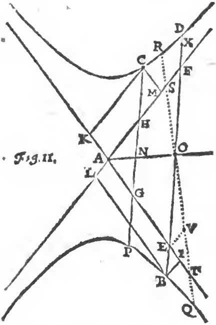


Fig. II.



æquiangula ſunt triangula E O V & F O S: erit [1] ut E O ad O V, ita F O ad O S. Quare cum E O ipſi F O ſit æqualis, erit & [2] O V ipſi O S, hoc eſt, rectæ O T æqualis, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ergo bifariam ſecatur recta R Q à diametro A O.

Corollarium 7.

Atque hinc manifeſtum fit, quòd, ſi vel in una eademque vel ad oppoſitas Hyperbolas binæ quælibet rectæ ſibi invicem æquidiſtantes ductæ ſint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum tranſeat ſeu diameter ſit: Quippe quæ per medium unius æquidiſtantium diameter ducetur, per medium quoque alterius æquidiſtantium tranſibit [3]. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppoſitarum Hyperbolarum diametros quotlibet, ſimulque ordinatim applicatas ad eaſdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumvè diametrorum communis interſectio eſt, reperire liceat.

[1] per 4 ſexti.
[2] per 14 quinti.
[3] per 5 Corol. 5 hujus.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisa est.

Sit per punctum C in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta recta G C H, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam G H curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta G H Hyperbolam in C & I: eritque [1] I H rectæ C G, ideoque & ipsi C H æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo G H Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porrò conversim, si G H in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in C H majori parte ipsa H I æqualis G C. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque [2] punctum I in Hyperbola, totaque C I [3] intra curvam cadet, ideoque ipsa G H Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo G C ipsi C H inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

[1] per 2 Cor. 5 hujus.
[2] per 4 Cor. 5 hujus.
[3] per 3 Cor. 5 hujus.

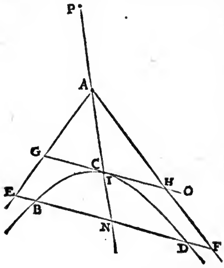
Corollarium 1.

Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti G C H æquidistans utcunque ducta sit B D, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum E B F sive [4] B F D, ut & F D E sive D E B æquale rectangulo G C H [5], id est, ipsius C H vel C G, dimidiæ tangentis quadrato.

[4] per 2 Cor. 5 hujus.
[5] per 5 hujus.

Corollarium 2.

Patet porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad diametrum A N ordinatim applicata sit BND, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi B N D æquidistans, cum æquales sint N F & N E [1]: erunt [2] quoque C H & C G æquales, ideoque [3] G C H Hyperbolam continget in C.



[1] per 2. & 5 Corol. 5 hujus.
[2] per 9 quinti, & 4 sexti.
[3] per 6 hujus.

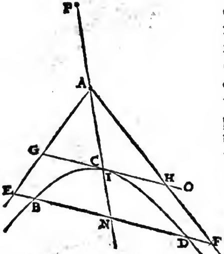
Corollarium 3.

Hinc liquet, non solùm omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ductâ bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti G H parallela sit B D, Asymptotis occurrens in E & F, ductâ per tactum C diametro A C N, quæ ductæ B D occurrat in N: quoniam [4] G C, C H æquales sunt, nec non E N, N F [5], erunt quoque (demptis æqualibus [6] E B, D F,) B N, N D æquales, ideoque & ad dictam diametrum A CN ordinatim applicatæ. At verò non posse aliam rectam præter G H Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur [7], quod fieri non posse superiùs [8] ostensum est.

[4] per 6. hujus.
[5] per 9 quinti & 4 sexti.
[6] per 2 Cor. 5 hujus.
[7] per supra demonstrata.
[8] in Cor. 6. 5 hujus.

Cæ-

Cæterùm monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est [1], ut C A P, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam; diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam contingens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per centrum æqualis & parallela ducitur, ut G C H. secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis P C, G H, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut C O, rectum latus sive Parametrum dici.



[1] per Corol. 1 5 hujus.

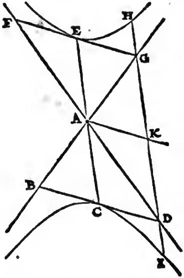
Theorema VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum I C, H E, quarum Asymptoti B G, D F, diameter transversa utcunque assumpta C E, perque ejus terminum E ducta recta F E G parallela ipsi B D, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque F E G oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter A K, diametro C E conjugata, ordinatim ad eandem A K applicatas ipsi C E diametro æquidistare.



Quoniam enim est [1] tam A E ad E G, ut A C ad C B, quàm [2] A E ad E F, ut A C ad C D; & sunt tam A E, A C [2] quàm C B, C D [3] æquales, erit quoque [4] tam E G ipsi C B, quàm E F ipsi C D, ac proinde & E G ipsi E F æqualis. Unde [5] recta F G oppositam Hyperbolam H E continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porrò si per G & D ducatur recta G D, secans secundam diametrum A K in K, oppositisque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ sint E G, C D, erunt & [6] quæ ipsas conjungunt G D, C E parallelæ & æquales. Ideoque cum secunda diameter A K contingentibus B D, F G, id est [7] ordinatim ad diametrum C E applicatis æquidistans sit, utpote ex Hypothesi ipsi C E conjugata: erunt quoque [8] rectæ G K, E A, ut & K D, A C, ideoque & [9] G K, K D æquales. Quibus si addantur æquales [10] G H, D I: erunt similiter rectæ K H, K I sibi invicem æquales. Quocirca cum [11] ad secundam diametrum A K applicata sit recta H I, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ [12] eidem H I ac proinde & diametro C E æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 1 Corol. 5 hujus.
[3] per 6 hujus.
[4] per 14 quinti.
[5] per 6 hujus.
[6] per 33 primi.
[7] per 3 Cor. 6 hujus.
[8] per 34 primi.
[9] per 1 Cor. 5 hujus.
[10] per 2 Cor. 5 hujus.
[11] per 6 Cor. 5 hujus.
[12] per 5 & 6 Cor. 5 hujus.

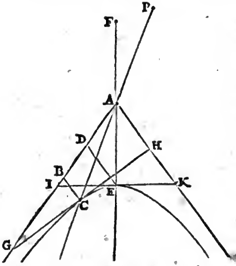
PROBLEMA I.

Propositio 8.

Datis quibuſcunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ P C, G H, oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eædem P C, G H conjugatæ diametri exiſtunt.

Ductis ab A centro per G & H Aſymptotis A G, A H, ductâque à C ad eorum alterutram rectâ C B alteri æquidiſtante, ſumatur inter A B, B C media proportionalis A D. Dein ductâ D E ipſi A D æquali, atque Aſymptoto A H parallelâ[1], erit E A F, tranſiens per E & A ac ipſius E A dupla, tranſverſus axis qui quæritur, atque I E K ad eandem perpendicularis, ac utrinque Aſymptotis terminata, axis ſecundus, priori conjugatus.



Quoniam enim punctum C [1] in Hyperbola eſt, rectangulumque A D E ipſi A B C æquale[2]; erit quoque punctum E [3] in Hyperbola. Porrò cum propter rectas D A, D E æquales [4] æqualis quoque ſit D A E angulus ipſi D E A, id eſt [5], E A K angulo, ſintque & anguli A E I, A E K ex conſtructione æquales: erunt [6] triangula A E I, A E K æquiangula, atque ob latus A E commune [7] etiam æqualia, latusque I E lateri E K æquale. Unde cum punctum E [8] in Hyperbola exiſtat, dividatque bifariam rectam I K, utrinque Aſymptotis terminatam, continget ipſa I K [9] curvam in E: ideoque, & propter angulos F E I, F E K rectos, conjugati axes erunt F E, I K.

[1] *ex hypotheſi.*
[2] *per 17 ſexti.*
[3] *per 3 hujus.*
[4] *per 5 primi.*
[5] *per 29 primi.*
[6] *per 32 primi.*
[7] *per 26 primi.*
[8] *per ſup. demonſtr.*
[9] *per 6 hujus.*

THEO-

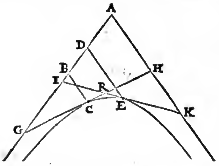
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ Asymptotis comprehenso æqualia abscindunt triangula, & rectangula sub eorundem triangulorum lateribus comprehensa invicem quoque æqualia sunt, ac præterea majora eorundem latera à contingentibus, ipsæque bases seu contingentes Asymptotis terminatæ, in mutuo occursu, nec non ipsarum partes curvam contingentes inter occursum & Asymptotos interjectæ, in punctis contactus, in eadem ratione secantur.

Hyperbolam C E, cujus Asymptoti A G, A K, rectæ G H, I K utrinque Asymptotis terminatæ, ac sibi mutuò in R occurrentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm triangula G A H, I A K æqualia esse; ac præterea esse G I ad I A, sicut K H ad H A; itemque G R ad R H, sicut K R ad R I; nec non G C ad C R, sicut K E ad E R.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis C B, E D Asymptotorum alterutri, ut A H, parallelis, cum sit ut G C ad G H, ita G B ad G A, & B C ad A H [1]; sitque G H ipsius G C dupla [2]. [1] per 4 sexti. [2] per 6 hujus.



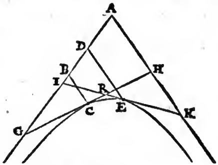
erit quoque tam G A ipsius G B quàm A H ipsius B C dupla, ideoque [3] rectangulum G A H rectanguli G B C sive A B C quadruplum. [3] per 20 sexti. Eodem modo rectangulum I A K rectanguli A D E quadruplum ostendetur. Hinc cum æqualia sint rectangula A B C, A D E [4], erunt quoque eorum quadrupla, nimirum rectangula G A H & I A K æqualia. Quod est primum. [4] per 3 hujus.

Unde cum [5] sit ut G A ad A K, ita I A ad A H, triangula quo- [5] per 16 sexti.

 que

6 per 15 sexti. que G A H, I A K æqualia erunt[6], utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.

7 per 16 quinti.
8 per 17 quinti.



Ac cum permutando [7] quoque sit G A ad I A, ut A K ad A H: erit & [8] dividendo G I ad I A, ut K H ad H A. Quod est tertium.

Porrò cum ab æqualibus triangulis G A H, I A K ablato communi quadrilatero I R H A, residua, nempe triangula G R I & K R H, quoque æqualia remaneant, erunt[9] eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit G R ad R H, ut K R ad R I. Quod est quartum.

9 per 15 sexti.

10 per 18 quinti. Unde cum componendo [10] quoque sit G H ad R H, ut K I ad R I, aut, sumptis antecedentium dimidiis, C H ad H R, ut E I ad I R: erit & per conversionem rationis [11] C H sive G C ad C R, ut E I sive K E ad E R. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

11 per Coroll. 19 quinti.

THEOREMA IX.

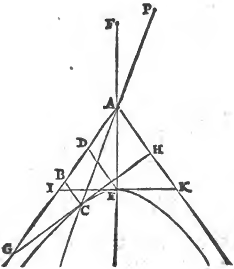
Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum tranversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

Sit in Hyperbola B C D, cujus Asymptoti A E, A F, ducta diameter utcunque P A C N, cujus secunda diameter transversæ P C conjugata sit G C H, parameter verò C I, ipsis nempe P C, G H tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

applicata quælibet D N: dico esse ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est [1], ut recta I C ad rectam C P, ita quadratum D N ac P N C rectangulum.

Productâ enim applicatâ D N utrinque per Hyperbolam ad Asymptotos, ut E B N D F, cum sit [2] F N quadratum ad H C quadratum, id est [3], ad B F D rectangulum, ut N A quadratum ad C A quadratum: erit dividendo [4] D N quadratum ad H C quadratum, ut P N C rectangulum [5] ad C A quadratum, & permutando [6] D N quadratum ad P N C rectangulum, ut H C quadratum ad C A quadratum, sive [7] ut G H quadratum ad C P quadratum, aut, quod idem est, ut I C ad C P. Quod demonstrandum erat.



[1] per Corol. 20 sexti.
[2] per 4. & 22 sexti.
[3] per 1 Corol. 6 hujus.
[4] per 6 secundi, & 17 quinti.
[5] per 6 secundi.
[6] per 16 quinti.
[7] per 15 quinti.

Corollarium 1.

Hinc colligitur, quo pacto datæ cujuslibet Hyperbolæ, ut B C D, Asymptoti inveniantur. Quippe inventis [8] centro A, diametro quâcunque A N quæ curvam secet in C, & ordinatim ad eandem applicatâ B N; si, productâ N A ad P, ut A P ipsi A C sit æqualis, ductâque per C rectâ G C I applicatæ B N parallelâ, in eadem notentur puncta H & G, ita ut sit P N C rectangulum ad B N quadratum, sicut A C quadratum ad quadratum abs C G seu C H: erunt, quæ ex A centro per G & H ducuntur rectæ A G E & A H F, Asymptoti quæsitæ [9].

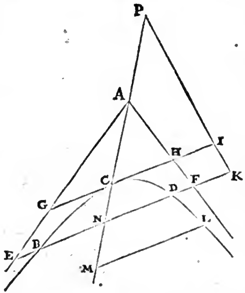
[8] per 7 Coroll. 5 hujus.
[9] per conversum 10 hujus.

Corollarium. 2.

Ex demonstratis patet, si per P & I transversæ diametri parametrique terminos ducatur recta P I K, occurrens cuilibet appli-

 catæ,

catæ, ut N D, productæ, si opùs fuerit, in K: rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale esse. Quoniam enim est [1] ut P C ad C I, sive ut P N ad N K [2], id est, (sumptâ N C communi altitudine) ut P N C rectangulum ad C N K rectangulum [3], ita idem P N C rectangulum ad D N quadratum, erit [4] rectangulum C N K quadrato applicatæ D N æquale, id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat:



[1] per 10 hujus conv.
[2] per 4 sexti.
[3] per 1 sexti.
[4] per 9 quinti.

Quæ ab Hyperbola ad diametrum ordinatim applicatur, potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam, quæ à diametro abscinditur inter ipsam applicatam & diametri verticem interjectam, excedensque figurâ simili similiterque positâ ei, quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est ex demonstratis, in Hyperbola applicatarum quadrata ad se invicem esse, veluti rectangula sub interceptis diametri portionibus, ab utroque transversæ termino sumptis, ut, si applicatæ sint L M, D N, erit ut quadratum L M ad rectangulum P M C, ita quadratum D N ad rectangulum P N C; cum utriusque eadem sit ratio, quæ est parametri ad transversam diametrum [5], eritque propterea [6] permutatim L M quadratum ad D N quadratum, ut P M C rectangulum ad P N C rectangulum.

[5] per 10 hujus.
[6] per 16 quinti.

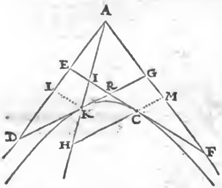
THEO-

THEOREMA X.

Propositio 11.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Asymptoti A D, A F, contingat in puncto C utcunque sumpto recta E C F, Asymptotis occurrens in E & F, diametro autem A H utcunque ductæ in I; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit C H, quæ producta Asymptoto occurrat in M. Dico rectangulum H A I æquale fore quadrato semidiametri K A, sive, quod idem est [1], continuè proportionales esse H A, K A, & I A.



Ductis enim D K G applicatæ C H, & K L contingenti F E parallelis, notatoque intersectionis puncto R, cum sit [2] R C ad C F, ut R K ad K D, hoc est [3], M G ad M F, ut L E ad L D: erit quoque [4] M G ad G F, ut L E ad E D. Quare cum porrò [5] sit F G ad G A, ut D E ad E A: erit [6] ex æquo M G ad G A, id est [7], H K ad K A, ut L E ad E A, hoc est [8], ut K I ad I A: & [9] componendo H A ad K A, ut K A ad I A. Quod demonstrandum erat.

[1] *per 17 sexti.*
[2] *per 2 Cor. sexti, & 9 hujus.*
[3] *per 2 sexti.*
[4] *per compositionem rationis contrariam, vide Clavium ad 18 quinti.* [5] *per 9 hujus.* [6] *per 22 quinti.* [7] *per 2 sexti.* [8] *per 2 sexti.* [9] *per 18 quinti.*

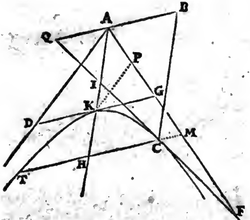
THEO-

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si quælibet contingens cuicunque ſecundæ Hyperboles diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum ſub ſecundæ diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abſciſſis, æquale ſemi-ſecundæ diametri quadrato.

Quamcunque Hyperbolam K C, cujus Aſymptoti A D, A F, contingat in puncto C, utcunque ſumpto, recta F C Q, occurrens ſecundæ diametro A B, utcunque ductæ in Q: dico, ſi ex C ad eandem diametrum A B ordinatim applicetur recta C B, & ex A eidem æquidiſtans ducatur A K H, ſecans contingentem F C Q in I, Hyperbolæque occurrens in K, atque per K recta agatur D K G ipſi A B parallela, (ita ut [1] A K H diameter ſit ſecundæ diametro A B conjugata, ac ſemi-ſecundæ diametri magnitudine ſint K G, K D,) fore rectangulum B A Q æquale ipſius K G vel K D ſemi-ſecundæ diametri quadrato.



[1] per 7 hujus.

Ductâ enim per C rectâ T C M ſecundæ diametro A B parallelâ, ideoque ad interceptam diametrum A K H ordinatim applicatâ, quæ Hyperbolæ occurrat in T diametroque A H in H, Aſymptoto verò A F in M: Quoniam eſt [2] H A quadratum ad K A quadratum, ſive [3] H M quadratum ad K G quadratum ſeu

[2] per 11 hujus, & Cor. 20 ſexti.
[3] per 4 & 22 ſexti.

seu [1] ad T M C rectangulum, ut H A seu C B ad I A, id est [2], ut B Q ad A Q; erit dividendo [3] H C quadratum seu B A quadratum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea [4] B A, K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q [5] quadrato K G æquale. Quod demonstrandum erat.

Corollarium ad duas propositiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti K, inventis Asymptotis [6], ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Asymptoto parallelâ, ut K P, ac sumptâ P G ipsi A P æquali, continget juncta G K D Hyperbolam in K [7]. quoniam uti G P ipsi P A, ita G K ipsi K D æqualis est [8].

Eodem modo, si datum punctum sit in Asymptotorum alterutra, veluti G, divisâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Asymptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat [9] in K: continget juncta G K D [10] Hyperbolam in puncto occursus K.

Sit deinde datum punctum intra angulum Asymptotis comprehensum, veluti I: ductâ à centro [11] per I diametro, ut A I H, quæ curvæ occurrat in K, sumptâque A H ipsis A I, A K tertiâ proportionali, si per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ contingenti in K æquidistet [2]), occurrens curvæ in C, continget juncta I C [13] Hyperbolam in eodem C puncto.

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui deinceps sunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q & centrum A secundâ diametro Q A B, transversâque ipsi conjugatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyperbola ductam ipsi Q A B æquidistantem bifariam dividat), nec non tangente K G vel K D, Asymptoto terminatâ; si fiat quadrato K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad secundam diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipsi A K æquidistans [14], quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C [15] in eodem puncto C Hyperbolam continget.

Manifestum porrò est, si datum punctum vel intra Hyperbolam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam continet: fieri non posse [16], ut ab eodem puncto ducatur recta, quæ producta eandem non secet.

[1] per 1 Cor. 6 hujus.
[2] per 4 sexti.
[3] per 17 quinti.
[4] per Cor. 20 sexti.
[5] per 17 sexti.
[6] per 1 Cor. 10 hujus.
[7] per 6 hujus.
[8] per 2 sexti.
[9] per 2 Cor. 3 hujus.
[10] per 2 sexti, & 6 hujus.
[11] invento per 7 Corol. 5 hujus.
[12] per 3 Cor. 6 hujus.
[13] per 11 hujus.
[14] per 7 hujus.
[15] per 12 hujus.
[16] juxta 1 Cor. 3 hujus.

CAPUT III.
DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opùs fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quàm per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continuetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quàm ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

Cùm de *angulo* simpliciter sermo erit, eum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

VI.

Alterutrum *anguli* crus, utrinque, si opùs fuerit, productum, atque ab utraque parte à *Centro* sumptum, magnitudine *intervalli* in altero crure terminati *Directrix* vocabitur.

VII.

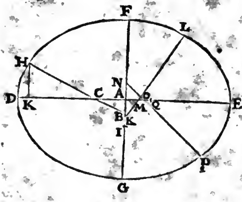
Describentem in statione prima dicemus, cùm ea ad *directricem* est perpendicularis: idem autem & tunc de *puncto* dictum esto, ac cùm de iis simpliciter sermo erit in ea statione considerabuntur.

VIII.

Recta à *puncto* per *Centrum* ducta, interceptæ inter *punctum* & *centrum* dupla, *Secans* nuncupabitur.

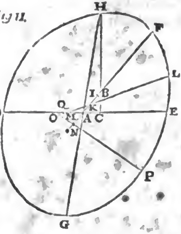
Ut si trianguli rectanguli A B C latus B C moveatur in *angulo* B A C, ex. gr., ut terminus C tendat ad A, simulque B vel retrocedat vel promoveatur versùs I; ita tamen, ut iidem termini B & C semper sint & exactè maneant in lateribus, quibus ab initio juncti fuêre, nempe B in latere A B, ac C in latere A C, productis ubi opùs fuerit; eodemque illo motu quolibet sui puncto, ex. gr., H, assumpto, prout placuerit, sive in ipsa B C, sive in eadem producta, (ut à nobis plerumque assumetur, cum id naturæ quodammodo convenientiùs videatur,) describat curvam lineam: nempe, ut, ubi punctum C pervenerit ad A, ac punctum B ad I, simulque H processerit ad F, descripta sit per motum puncti H cur-

Fig. 1.



H curvæ portio H F: deinde puncto C promoto per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H pervenerit ad L, descriptus sit arcus F L: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E inciderit, descriptus sit arcus L E: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus E P: atque si porrò eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva H F L E P G D: erunt

Fig. II.



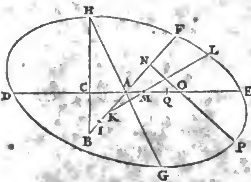
B C, quæ & in aliis stationibus est I A, K M, A Q, N O, &c. *linea describens.*

H *punctum efficiens.*

H C & H B utrumque *intervallum.*

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, A C, utrinque, si opus fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam A D quàm A E æqualis sit rectæ H B, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota D E *directrix* erit.

Cum autem *describens* B C eidem *directrici* D E est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure A B, uti A I, *angulo* nempe existente recto, ut in

ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione B C, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit I A, casu primo, & B C, casu altero, *describens in statione prima* seu *describens* simpliciter, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, *punctum efficiens in statione prima* seu *punctum* simpliciter.

Ac proinde F A G [a] vel H A G [b], nempe ab eodem *puncto* per *centrum* A ducta atque ipsius F A sive H A dupla, *secantem* repræsentat.

[a] in casu fig. I & similib.
[b] in casu fig. II & III ac similib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuslibet *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallis* quibuslibet H C, H B, descripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *secans* [a] F A G [a] vel H A G [b]; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque assumpto, ad curvam applicata I L *secanti* F A G [a] vel H A G [b] æquidistans: dico fore quadratum applicatæ L I ad rectangulum D I E, ut est quadratum *Secantis* F G [a] vel H G [b] ad quadratum *directricis* D E.

[a] in casib. fig. I, II, & similibus.
[b] in casib. cæterarum fig. & similibus.

Sit enim recta K M *describens* in ea statione, uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* B A C rectus sit [1], ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quæ occurrat applicatæ L I, aut eidem productæ, si opus fuerit, in N: cum *intervallum* K L æquale sit dimidiæ *directrici* A E vel A D, [2] ideoque & K L quadratum æquale A E vel A D quadrato, ablatis utrinque æqualibus, nimirum [3], quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, residua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum [2], æqualia erunt. Unde cum [3] sit ut L I quadratum ad L N quadratum, id est [4], ad D I E rectan-

[1] per 34 primi.
[2] per 47 primi, & 5 secundi.
[3] per 4 & 22 sexti.
[4] per supra demonstr.

 gulum,

Fig. I.

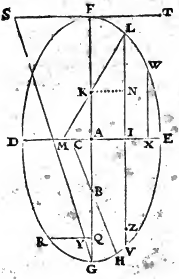
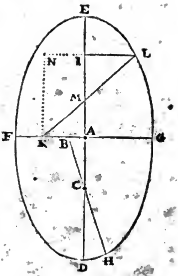
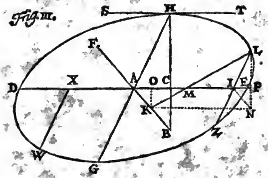


Fig. II.



[1] per 15 quinti. gulum, ita LM quadratum ad LK quadratum, hoc est, ita FA quadratum ad AE quadratum, sive [1] ut FG quadratum ad DE quadratum, constat priori casu propositum.

Fig. III.



Non sit deinde *angulus* BAC rectus [2], ducanturque ad *directricem*, eamvè productam, si opùs fuerit, rectæ KO, LP *describenti* BC parallelæ, ideoque ad *directricem* DE perpendiculares, ut & IN lateri AB parallela, quæ ipsi LP, eidemvè productæ, si opùs fuerit, occurrat in N; ita ut [2] similia sint triangula AHC & ILP, itemque

[2] per 29 primi.

Fig. IV.

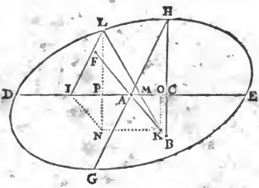


Fig. V.

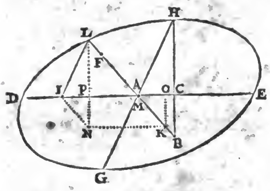
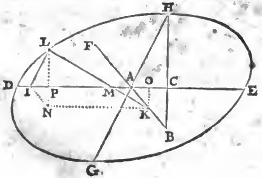


Fig. VI.



que A H B & I L N, ac denique jungatur K N. Quoniam itaque eſt [1], ut B A ad K A, ſive ut B C, id eſt, M K, ad K O, ita M L, hoc eſt, H C, ad L P; ut autem H C ad L P, ita H A ad L I, & ita B A ad N I, ac per conſequens B A ad K A, ut eadem B A ad N I: erit [2] K A ipſi N I æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypotheſi. Quare & A I, K N æquales & parallelæ erunt [3]. Porrò cum æquales ſint rectæ K L & A E vel A D, ideoque & ipſarum quadrata, hinc ſubductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum K N ab una, ac quadrato A I ab altera parte, erunt

[1] per 4 ſexti.
[2] per 9. quinti
[3] per 33 primi.

Fig. VII.

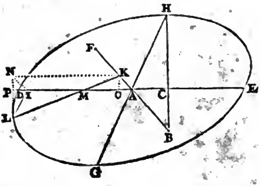
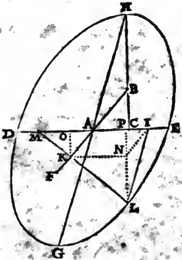


Fig. VIII.



erunt quoque residua, quadratum nempe L N & rectangulum D I E æqualia [1]. Unde cum sit [2] L I quadratum ad L N quadratum, hoc est [3], ad D I E rectangulum, ut A H quadratum ad H B quadratum, id est, ad A E quadratum, sive [4] ut H G quadratum ad D E quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

[1] per 47 primi, & 5 secundi.
[2] per 4 & 22 sexti.
[3] per supra demonstr.
[4] per 15 quinti.

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistunt, transversa; illa verò, cui eædem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

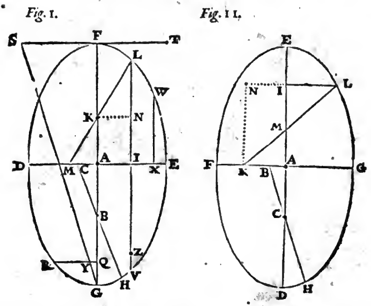
Corollarium. 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim LI vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

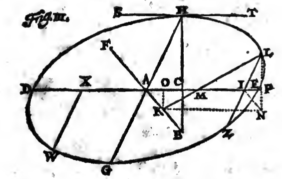
Apparet porrò rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri trans-

versæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem seca-



• in casu fig. I & similib.
ᵇ in casu fig. III & similib.

re. Si enim per F ᵃ aut H ᵇ terminum secundæ diametri G F ᵃ vel G H ᵇ ductâ rectâ S T, transversæ diametro D E paralle-



lâ, assumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L, quod descriptum sit *describente* in statione K M, ducaturque

L I

LI [a] vel LP [b] ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut [a] in casu fig. I & similib. in triangulo MLI [a] vel MLP [b] recta ML, id est, perpendicularis FA [a] vel HC [b], major sit [c] quàm LI [a] vel LP [b]; adeò ut punctum L, quod in curva utcunque assumptum est, id est, tota Ellipsis, præter F [a] aut H [b] punctum, infra ductam ST, seu versùs Ellipseos centrum, cadat.

[b] in casu fig. III & similib.
[c] per 18 primi.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI, WX, erit quadratum WX ad rectangulum DXE, ut quadratum LI ad rectangulum DIE: cum [1] utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG [a] vel HG [b] ad quadratum DE, sive quæ parametri ad transversam diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

[1] per 13 hujus.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V, quoniam est [3] quadratum LI ad rectangulum DIE, ut quadratum VI ad idem DIE rectangulum; erit [4] quadratum LI æquale quadrato VI, ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

[3] per Cor. præced.
[4] per 9 quinti.

Corollarium 5.

Constat porrò, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V, exempli gratiâ, puncto Z, in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ [5], ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

[5] per Cor. præced.

Corollarium 6.

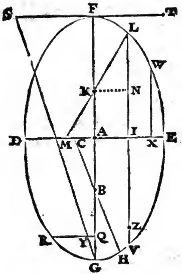
Ex dictis porrò colligitur, si ab extremitate transversæ dia-

 metri,

[a] in casu fig. I & similib.

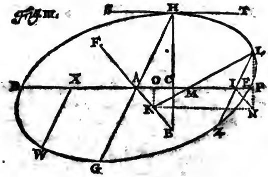
metri, ut puta F G [a], eductâ parametro F S secundæ diametro D E parallelâ, jungatur S G, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut R Q, quæ secet junctam S G in Y: fore rectangulum F Q Y quadrato applicatæ R Q æquale.

Fig. III.



[1] per 13 hujus.
[2] per Cor. 20 sexti.
[3] per 1 sexti.

Quoniam enim est [1] G F quadratum ad D E quadratum, id est [2], G F ad F S, sive G Q ad Q Y, hoc est [3], G Q F rectangulum ad Y Q F

Y Q F rectangulum, ut [1] idem G Q F rectangulum ad R Q quadratum, æqualia erunt [2] Y Q F rectangulum ad R Q quadratum: id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat.

[1] per 13 hujus.
[2] per 9 quinti.

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spatium adjacens lateri recto, latitudinem habens lineam quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri verticem abscinditur, deficiensque figurâ simili similiterque positâ ei quæ lateribus transverso rectoque continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuslibet diametris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus D A E & F A G [a] Ellipsis sit describenda, *describente* B C, quæ semi-axium A D, A F differentia sit, *intervallis* verò H C, H B, ipsis A F, A D utroque utrique æqualibus, in *angulo* D A G, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis quæsita.

[a] in casu fig. I & similib.

At si aliis quibuslibet conjugatis diametris, obliquè sese intersecantibus, ut D E, H G [b], Ellipsis sit describenda: demissâ à termino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, sumptâque in eadem seu in ipsa productâ, si opus fuerit, rectâ H B ipsi D A vel A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, si *describente* B C, *intervallis* verò H C, H B, in *angulo* B A C Ellipsis describatur, erit hæc ea ipsa quæ quæritur.

[b] in casu fig. III & similib.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applicatæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque innotescit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

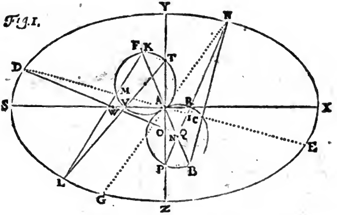
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

In Ellipsi circa quoscunque axes descriptâ, ductâ quælibet diameter transversa est, habetque secundam sibi conjugatam.

Sit in Ellipsi S Y X Z, cujus centrum A, axes verò S X, Y Z, ducta quælibet diameter D A E; & sic describens O W in ea statione, uti fuit cùm descriptum est punctum D vel E, ita ut intervalla sint D W, D O. Deinde applicatâ eâdem describente in statione reciproca, hoc est, in alterutro angulorum qui ipsi W A O deinceps sunt, veluti P R, ita ut rectæ A R, A P ipsis A W, A O reciprocè sint æquales, nimirum A R ipsi A O, & A P ipsi A W, ac proinde triangulum W A O [1] simile & æquale triangulo P A R, ab Ellipseos puncto H, quod describenti P R in directum est, ducta sit diameter altera H A G. Dico diametrum D E transversam esse, H G autem secundam ipsi D E conjugatam: id est, si, ductâ H C ad D E perpendiculari, in eadem H C, produ-

Fig. I.



ctâ, si opùs fuerit, sumatur H B ipsi D A æqualis; ductâque per B & A rectâ B A F, in angulo B A C, intervallis verò H C, H B, Ellipsis describatur, cujus utique conjugatæ diametri sunt in D E, & H G [2]: dico illam cum exposita Ellipsi omnino eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat.

Assumpto enim in exposita Ellipsi alio quopiam puncto L, quod quidem descriptum sit describente in statione T V, diametro T V circulus describatur, qui, propter angulum T A V rectum [4], necessariò quoque per A transibit [3], lineasque B A F & D A E

[1] *per 4 primi.*

[2] *per 13 hujus ejusque Corol. 7*

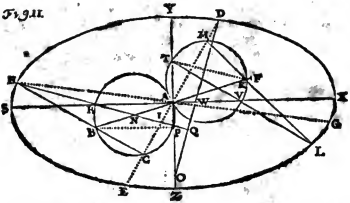
[4] aut certè, quia punctorum T & V alterutrum cum puncto A coincidit, uti est casus in fig. VI

[3] *per conversam 31 tertii.*

DAE alibi etiam secabit [a], uti in K & M. Deinde junctâ KM, eaque productâ versùs L, agantur TK, PB.

[a] aut illarum alteram continget, alteram verò secabit, ut in casib. fig. III & IV.

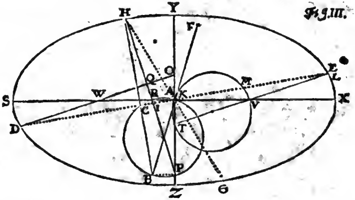
Fig. II.



Cum igitur ipsarum DO, HP, productarum, si opùs fuerit, intersectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob similitudinem trianguli OQP cum utroque triangulorum OAW, RAP [b], notato ipsarum DE, PH intersectionis puncto I, erunt triangula

[b] vel, si puncta O & P coïncidant, ob angulos AOW, APR semirectos.

Fig. III.



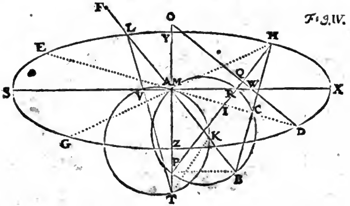
IQD, ICH æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula ODA, PHB latera OD, DA lateribus PH, HB, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant; erit & [c] basis OA,

[c] per 4 primi.

O A, sive recta A R, basi P B, angulusque D O A, id est P R A, angulo H P B æqualis; ac propterea [1] recta P B ipsi R A parallela. Hinc cum triangulorum R A P & B P A latera R A, A P lateribus B P, P A circa æquales angulos, nempe rectos, utrumque utrique sint æqualia: erit & [2] basis A B basi P R, seu describenti T V, angulusque A R P angulo P B A æqualis. Quocirca & circulus diametro A B descriptus (qui quidem, ob angulos A C B, A P B rectos, ac A B P, A R P æquales, per puncta C, P [3], & R [4] transit) circulo T K V æqualis erit. Unde cum anguli P B C, B P R ipsis T K M, K T V, uterque utrique, æquales sint, nempe P B C ipsi T K M [d], quoniam uterque cum angulo P A C seu T A M [5] binos rectos constituit [e], & B P R ipsi

[1] per 27 primi.
[2] per 4 primi.
[3] per conversam 31 tertii.
[4] per conversam 21 tertii.

[d] pro casu fig. II adde: ideoque & hi qui ipsis deinceps sunt. [5] per 22 tertii. [e] in casu fig. II uterque angulo P A C seu T A M æqualis est per 20 tertii. In casu fig. III uterque cum angulo P A C binos rectos constituit, nempe hic per 13 primi, & ille per 22 tertii. In casu fig. IV æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam prior cum angulo P A C, posterior verò cum angulo T V A (qui quidem P A C, T V A æquales sunt per 32 tertii) binos rectos constituit per 22 tertii. In casu fig. V, T K M sive T A M æqualis est angulo P B C, quia uterque cum angulo P A C duos rectos constituit per 13 primi & 20 ac 22 tertii. In casu fig. VI æquales sunt anguli P B C, T K M, quoniam angulus P A C æqualis est ei, qui in segmento A V M constitueretur per 32 tertii, quorum quidem prior cum angulo P B C, posterior verò cum angulo T K M binos rectos constituit per 22 tertii.



K T V, propterea quòd uterque [6] angulo B A R seu K A V sive F A V æqualis est [f]; sintque porrò, ob æquales angulos P A B, T A K [7], tam peripheriæ P B, T K, quàm earum subtensæ, nempe

[6] per 20 tertii, atque in casu fig. III per eandem & 32 tertii. [f] In casibus fig. IV & V tam angulus B P R seu B A R, quàm angulus K T V cum angulo K A V duos rectos constituit per 13 primi, & 22 tertii. [7] per 26 & 29 tertii.

pe latera P B, T K dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia [g]: apparet sicuti rectæ B C, P R productæ concurrunt in H, ita quoque rectas K M, T V productas, & quidem, cum ipsi P H æqualis sit T L, in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis [1] similia atque in totum æqualia sunt triangula B P H, K T L, adeoque & latus K L lateri B H æquale. Est autem [2] & subtensa K M subtensæ B C æqualis [h], ob æquales an-

[g] In casu fig. III. ubi recta B A F tangit circulum T K V, æqualia sunt latera B P, T K ob angulos B A P, T V K æquales *per 32 tertii.* In casu fig. V I, ubi recta P A Y contingit circulum T K V, æquales sunt subtensæ B P, T K ob angulos P A B, T M K æquales *per 32 tertii.* [1] *per 26 primi.* [2] *per 26 & 29 tertii.* [h] In casu fig. I I I, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus qui consisteret in segmento K T M æqualis foret angulo F A M seu B A C *per 32 tertii.* In casu fig. IV, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus K T M æqualis est angulo K A C seu B A C *per 32 tertii.* In casu fig. V, K M ipsi B C est æqualis, quandoquidem angulus in segmento B C æqualis foret angulo K A M, utpote cum tam hic quàm ille cum angulo C A B duos rectos constitueret *per 13 primi & 22 tertii.*

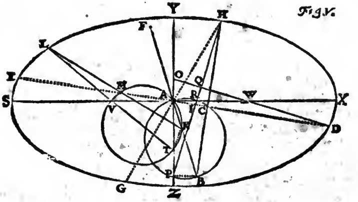


Fig. V.

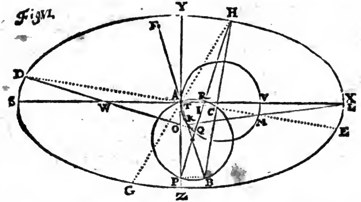
gulos K A M, B A C. Quocirca & L M ipsi H C æqualis erit. [i] Unde cum describens sit K M, utpote ipsi B C æqualis, ac constituta in angulo K A M (qui cum ipso B A C vel idem [i], vel ei ad verticem [k], vel denique ipsi deinceps est [l]) aut certè cum alterutro crurum coïncidens [m], atque ex demonstratis æqualia quoque sint intervalla H B, H C intervallis L K, L M: sequitur punctum L, in exposita Ellipsi utcunque sumptum, id est, totam Ellipsin S Y X Z, esse in Ellipsi, quæ in angulo B A C, intervallis H B, H C, describitur, ideoque alteram alteri per

[i] ut in casu fig. V I.
[k] ut in casibus fig. I. & II.
[l] in casu fig. V.
[m] ut in casibus fig. III. & IV.

[1] per 13 *hujus, ejusque Cor. 7.*

omnia congruere. Sunt autem [1] hujus conjugatæ diametri D E, H G. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-

Fig. VI.



metri erunt, nimirum D E transversa, & H G secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium. 1.

Hinc colligitur non solùm Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuslibet diametris conjugatis, ejus Ellipseos cujus diametri sunt, axes inveniantur.

Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint D A E & H A G, ductâ H B, semidiametro D A vel A E æquali, atque ad D E perpendiculari, junctâque B A ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo N A vel N B circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ H P, H R semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs, aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ S X & Y Z, exhibebunt magnitudine ac positione quæsitos axes ejusdem Ellipseos, cujus D A E & H A G conjugatæ diametri existunt.

[2] per 4 *primi.*

[3] per 31 *tertii.*

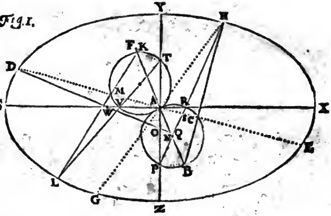
Ductâ enim P B, sumptâque A O ipsi A R, ideoque [2] & ductæ P B æquali, agatur D O, occurrens ipsi S X in W. Cum itaque ob angulum A C B rectum descriptus circulus etiam per C transeat [3], erunt anguli P B H & O A D æquales, quoniam uterque

que cum angulo [a] P A C seu P B C duos rectos constituit [1]. Unde cum triangula O A D, P B H latera O A, A D lateribus P B, B H, utrumque utrique, & quidem circa æquales angulos æqualia habeant: erit quoque [2] basis O D basi P H, id est, rectæ S A vel A X, ut & angulus A O D angulo B P H seu [3] P R A æqualis. Hinc cum æqualia sint triangula R A P, O A W, propter angulos ad R & O æquales, atque [4] R A P, O A W rectos, nec non latera R A & O A æqualia: erit etiam [5] latus A W lateri A P, ut & latus O W ipsi P R æquale. Quocirca cum [6] *describentes* sint

[a] nimirum *cum angulo* P A C in casu fig. I. & similibus, & *cum angulo* P A C *seu* PBC, in casu fig. II. & similibus.

[1] *per* 13 *primi &* 22 *tertii.* [2] *per* 4 *primi.* [3] *per* 29 *primi.* [4] *per* 31 *tertii &* 13 *primi.* [5] *per* 26 *primi.* [6] *per* 13 *hujus.*

Fig. I.



O W, P R ejus Ellipseos, cujus axes sunt S X, Y Z, & quidem in statione reciproca constitutæ, *punctaque efficientia* D & H: manifestum est ex superiori demonstratione, Ellipsin, quæ axibus S X, Y Z describitur, cum ea, cujus diametri conjugatæ sunt D E & H G, omnino eandem esse:

Atque ita, quæ de Ellipsi, circa quoscunque axes descripta, superiori Theoremate proposita ac demonstrata sunt, etiam cuilibet Ellipsi, & circa quascunque diametros conjugatas descriptæ, convenire, manifestum est.

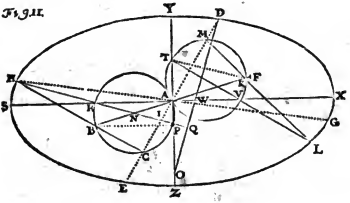
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro D E, utcunque ductâ, partem A E parti D A æqualem esse, cum utraque *intervallo* H B æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum D E, H G transversa sit D E, & H G se-

Fig. II.



[1] per 14 hujus ejusque Corol. 1. cunda; cùm in Ellipsi ducta quælibet diameter [1] transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque H G transversa. At verò & D E secundam esse ipsi H G conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantùm literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit [2].

[2] per 2 Cor 13. & 3 Cor. 14 hujus.

Co-

Corollarium 5.

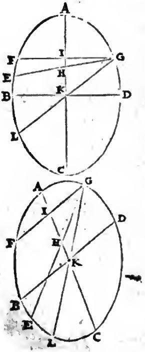
Adeoque quælibet recta, à quovis curvæ puncto ad quamcunque Ellipseos diametrum ordinatim applicata, tota intra Ellipsin cadit; utpote cum ea nec in totum extra Ellipsin cadere[1], nec eidem in pluribus quàm duobus punctis occurrere[2] possit.

[1] per Cor. præcedens. [2] per 5 Cor. 13 hujus.

Theorema XIV.

Propositio 15.

Quæ bina quælibet Ellipseos puncta conjungens recta linea bifariam à diametro dividitur, erit aut per centrum ducta, aut ad eandem diametrum ordinatim applicata, hoc est, conjugatæ diametro æquidistans.



Si enim in Ellipsi A B C D, cujus centrum K, à diametro A K C bifariam divideretur recta E H G, quæ neque per centrum transeat, neque conjugatæ diametro B D æquidistans sit; applicatâ ordinatim G I F, ductâque per centrum rectâ G K L: Quoniam esset, ut G H ad H E, ita tam G I ad I F[3], quàm G K ad K L[4], recta per F & E, nec non per E & L ducta foret una linea recta diametroque A C parallela[5]; ideoque ad alteram ipsi conjugatam, nempe ad B D, ordinatim applicata[6], atque Ellipsi in tribus punctis occurreret; quod fieri non posse supra[7] ostensum est.

[3] per 4 Cor. 13 hujus. [4] per 2 Cor. 14 hujus. [5] per 2 sexti. [6] per 13 & 3 Cor. 14 hujus. [7] in 5to Coroll. 13 hujus.

Corollarium 1.

Ideoque si diameter rectam quamlibet in Ellipsi non per centrum ductam bifariam dividat, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit[8].

[8] per 4 Cor. 13, & 15tam hujus.

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta linea per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit [1]. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriumve diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque [2] invenire liceat.

[1] per 1 Cor. 15 hujus.

[2] per 1 Cor. 14 hujus, alterve, ut cuilibet obvium est.

Corollarium 3.

Ex dictis facilè apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcunque Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere [3]: utpote cum ipsa [4] vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

[3] per 5 Cor. 14 hujus.

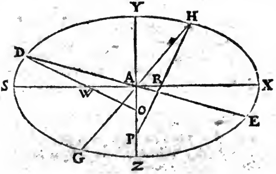
[4] per 15 hujus ejusque Cor. 1.

Problema II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi S Y X Z ductæ utcunque diametro D A E altera conjugata invenienda sit. Inventis [5] axibus S A X & Y A Z, atque à termino D vel E ad axium alterutrum, veluti ad Y A Z, applicatâ rectâ, ut D O, semi-axi alteri



S A æquali, quæ producta, si opùs fuerit, secet eundem axem alte-

[5] per 2 Cor. 15 hujus.

alterum, uti in W, applicetur in ſtatione reciproca ipſi O W, eidem æqualis recta P R, nempe ut A P, A R ipſis A W, A O ſingulæ ſingulis æquales ſint, ac producta P R Ellipſi occurrat in puncto H, à quo ſi per centrum A ducatur recta H A G, Ellipſi terminata: conſtat, per ea, quæ ad Propoſitionem 14^tam hujus libri demonſtrata ſunt, eandem H A G eſſe diametrum ipſi D E conjugatam.

Atque ita ſimul apparet, ſingulis diametris ſuas quoque diſtinctas conjugatas diametros eſſe, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci poſſe.

Corollarium.

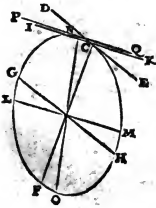
Unde porrò perſpicuum fit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipſi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ductâ per datum punctum & centrum diametro, inventâque alterâ ipſi conjugatâ [1], per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidiſtans: erit eadem recta [2] contingens quæſita.

[1] *per 16 hujus.*
[2] *per 4 Cor. 14 hujus.*

THEOREMA XV.

Propoſitio 17.

Ellipſin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela eſt diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipſin C H F G in puncto C recta D C E, parallela diametro G H, quæ conjugata ſit diametro C F, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipſin non contingere.

Si enim fieri poteſt, contingat eandem quoque in puncto C recta I C K, diametroque L M, eidem I C K æquidiſtanti, altera conjugata ducatur N O, (quæ cum à priori C F

CF diversa sit, (punctum N cum puncto C non coïncidet,) ac per N ipsi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidistans ducta sit PQ. Cadet itaque [2] punctum C, adeoque recta ICK infra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò & eodem modo [3] punctum N, ideoque recta PNQ, infra contingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet, quod repugnat. Non contingit ergo ICK Ellipsin. Eadem de omnibus aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

[1] per 4 Cor. 14 hujus.
[2] per 2 Cor. 13 hujus.
[3] per idem Coroll.

Corollarium.

Constat itaque [4] in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æquidistantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum & centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi [5], & contra, quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cuilibet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in eodem vertice contingere.

[4] per Coroll. præcedens.
[5] per 4 Cor. 13 hujus.

THEOREMA XVI.

Propositio 18.

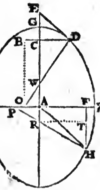
Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad eandem diametrum recta ordinatim applicetur: erit rectangulum sub diametri portionibus, à centro per contingentem applicatamque abscissis, semidiametri quadrato æquale, & contra.

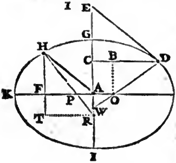
Quamcunque Ellipsin GD, cujus centrum A, contingat in puncto D, utcunque sumpto, recta DE, diametro IG occurrens in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordinatim applicata sit DC: dico rectangulum CAE quadrato semidiametri AG æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter IG, sitque OW *describens*, in statione uti fuit, cùm per eandem descriptum est punctum D; ita ut OD *intervallum* semi-axi AG æquale sit, PR autem *describens* in statione, ipsi OW reciprocâ; ita ut à curvæ puncto H, quod nempe

nempe *describenti* P R in directum est, ducta diameter H A conjugata sit ei, quæ per D & A duceretur [1], ideoque & contingenti D E parallela [2]. Sitque porrò ad secundum axem A K applicata H F, ducanturque O B, R T ipsis A G, A K æquidistantes, quæ applicatis D C, H F, productis, si opus fuerit, occurrant in B & T.

1 per 4 Cor. 14 hujus. *2 per Cor. 17 hujus.*





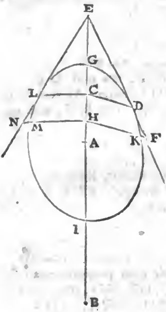
Itaque cum similia sint triangula O A W & R A P [3], erunt quoque triangula W C D & R T H, nec non O B D & P F H [4] similia. At verò & latera W D & R H, nec non O D & P H [5] æqualia sunt. Quare & latera W C & R T sive A F, nec non D B, & H F [6] æqualia erunt. Sunt autem porrò [7] triangula E D C & H A F æquiangula; unde ex antedictis erit [8] D C ad C W sive A F, id est [9], E C ad H F sive D B, uti eadem D B ad B O [10]. Unde cum proportionales sint E C, D B, B O, erit [11] ut E C ad B O sive C A, ita D B quadratum ad B O quadratum; & componendo [12], ut E A ad C A, ita [13] D O quadratum ad B O quadratum, hoc est, G A quadratum ad C A quadratum; ac proinde [14] & rectæ E A, G A, C A proportionales erunt, ideoque [15] rectangulum C A E quadrato semi-axis A G æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipsam D E Ellipsin contingere non possit [16], patet conversum quoque verum esse: nimirum, si rectangulum C A E æquale sit quadrato semi-axis A G, & per C ordinatim applicata Ellipsi occurrat in D, junctam E D esse contingentem.

3 ex constructione. *4 per 29 primi, & 21 sexti.* *5 ex constructione.* *6 per 26 primi.* *7 per 29 primi.* *8 per 4 sexti.* *9 propter triangula E D C, H F A æquiang.* *10 propter triangula D C W, D B O æquiangula.* *11 per Cor. 20 sexti.* *12 per 18 quinti.* *13 per 47 primi.* *14 per Cor. 20 sexti.* *15 per 17 sexti.* *16 per 17 hujus.*

Deinde non sit recta I G Ellipseos G D axis, sed alia diameter quæcunque, cujus parameter I B, atque ab assumpto in curva

utcunque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur D C, sitque quadrato semidiametri A G æquale rectangulum C A E: dico junctam E D, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversim.

Sit enim in eadem E D, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcunque punctum F, sitque per F ducta recta F H ipsi C D æquidistans, quæ dictæ diametro I G occurrat in H, Ellipsi verò G D in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissimè punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde I G ut axe, eâdemque parametro I B, intelligatur descripta alia Ellipsis G L, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur C L, H M, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque E L, (quæ utique Ellipsin G L in L continget [1],) eaque producta, si opùs fuerit, productæ H M occurrat in N.



[1] per sup. demonstr.

Itaque quoniam est quadratum D C ad rectangulum G C I, ut quadratum L C ad idem G C I rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri I B ad diametrum sive axem I G [2]:) erunt [3] quadrata D C, L C, ideoque & rectæ D C, L C æquales. Eodem modo, & rectas K H, M H æquales esse, demonstrabitur. Atverò cum sit C D ad H F, ut C L ad H N, (siquidem [4] utriusque eadem est ratio, quæ rectæ E C ad rectam E H,) erunt quoque [5] H F & H N æquales. Est autem H N major applicatâ H M, cum contingens sit E L N: ergo & H F applicatâ H K major erit, ideoque punctum F, in recta E D F utcunque sumptum, hoc est, tota E D F, extra Ellipsin, G D cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter E D F alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere [6], manifestum quoque est conversum: si nempe E D Ellipsin G D

[2] per 13 hujus, & Cor. 20. sexti.
[3] per 9 quinti.
[4] per 4 sexti.
[5] per 14 quinti.
[6] per 17 hujus.

in

in D. contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem diametrum ordinatim applicata sit D C, rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra [1] ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema perficietur.

Ductâ ex D ad inventam [2] diametrum G I rectâ ordinatim D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æquale, jungaturque E D.

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A centrum [3] rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æquale fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicatâ C D: nimirum, quæ [4] æquidistet contingenti quæ per G duceretur [5], occuratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa tam priori quàm posteriori casu [6] contingens quæsita.

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse duci rectam, quæ eandem contingat, manifestissimum est.

[1] in Cor. 16. hujus.
[2] per 2 Cor. 15. hujus.
[3] inventum per 2 Coroll. 15 hujus.
[4] juxta Cor. 17. hujus.
[5] per præcedentia, aut 5 Coroll. 14. hujus.
[6] per 18 hujus.

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maximè naturali, absque ulla solidi consideratione, Elementa proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Veteres *Coni sectiones* appellavêre, tradidisse confido. E quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam, Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori manuductione facillimè deducet, quicunque animum iis debitè applicuerit, atque in Geometricis per se ad ulteriora progredi valeat. Adeò ut eâdem tractandi methodo hisce diutiùs inhærere supervacuum putem, præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia supersit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorundam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum fragmentis manifestum est; quæque tam ab iisdem

 quàm

quàm à Recentioribus *Locorum Inventio* sive *Compositio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæterisque Geometris ea præcipuè conscripta esse; quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis superaddidere, omnino credibile est. Cumque penitiorem curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac distinctionem, ut & distributionem in sua genera & species, cum segregatione earum, quæ verè Geometricæ non sunt, ab iis quæ in Geometriam sunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam existimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc subjungere, non quidem eâ methodo, sicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantùm *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo judicio, minùs rectè,) vocârunt, id est, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipsis*, sive *circuli circumferentia* existunt, (quorumque Locorum Compositioni eos solummodo intentos fuisse invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immensum excresceret, si ad Loca, quæ sunt lineæ curvæ secundi generis, uti nobis propositum est, extenderetur; sed Arte Analyticâ per Æquationum examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino casus possibiles resolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis cum ordinem simus observaturi, ut jam post explicationem Elementorum Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipsis, (suppositâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ lineæ sunt vel ex prædictis curvis constant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

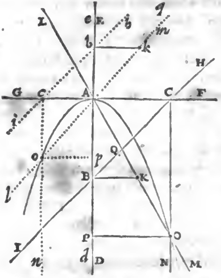
mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumque* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantùm descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facilè experietur, vel illos saltem hîc adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores judicamus.

Caput IV.

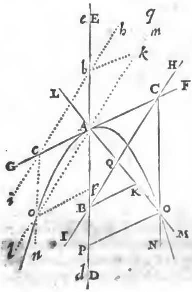
Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano delineandi Methodus.

Sit triangulum quodcunque isosceles A B C, & tam æqualia crura A B, A C, quàm basis B C utrinque indefinitè producantur, ut ad D, E, & F, G, nec non H I; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito cruri æquidistans, ut B K, & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A, ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti L A K M; ac denique rectæ F G insistens C N ipsi D E parallela transeat per ipsarum F G & H I intersectionem C. Dico, si angulus E B H atque ipsi ad verticem D B I cum recta B K moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus A B semper applicatum maneat rectæ D E, simulque recta H I huc atque illuc promoveat rectam C N, sibi ipsi semper æquidistan-

tem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædictam LM, per punctum K semper transeuntem, intersectionem ipsarum CN, LM, quæ fit ad O, Parabolam describere, cujus diameter est AD, parameter KB, ac FG eandem contingens in vertice A.



In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus EBH seu DBI, si intersectio rectarum FG, HI designetur per C, atque ab intersectionis puncto O ad diametrum applicata sit OP ipsi FG æquidistans: erit semper KB ad BA, hoc est, ad AC, uti eadem AC ad CO [1]: ac proinde [2] rectangulum sub KB, CO, id est [3], sub KB, AP quadrato rectæ AC, hoc est [4], ipsius OP æquale. Unde si BAC angulus rectus fuerit, erit AD axis, sin minùs, diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi BAC vel BAG angulo æquales.



In transitu etiam hîc notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum HI, LM, puta Q, Hyperbolam sive oppositas

[1] per 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 17 sexti.
[3] per 34 primi.
[4] per eandem.

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum B A C isosceles non foret, nec etiam recta B K ex angulari puncto B sed ubivis in recta A D educta esset, nihilominus tamen curvam A O Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quoque casibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, quâlibet *efficiente*; & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* I G, *intervallo* A L, & *directrice* K L O, angulis autem I A L & K L A inæqualibus, descripta curva D A M: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à *Polo* A ad *directricem* rectâ A K, ita ut angulus L A K angulo L A G æqualis sit, centro A & intervallo A K circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ad *directricem* in K & Q [a], perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ I K, G Q, sibi mutuò occurrentes in F, rectas F I, F G Asymptotos esse [b].

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut O A D, quàm *describens*, ut O D, in statione uti fuêre, cûm per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli A I K, A K I inter se [1], nec non simul sumpti angulo K A G, (quippe tam posterior quàm priores [2] cum angulo I A K binos rectos constituunt): erunt quoque anguli A I K seu A I F & G A L, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea [3] rectæ I K F & A L parallelæ [4]; ideoque sicut I K F rectæ F G occurrit, ita & eidem F G occurrent

[a] aut eandem in K contingens, uti in casu fig. V. exhibito.

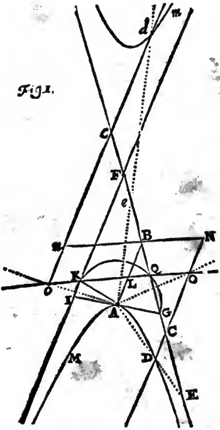
[b] si verò dictorum punctorum bina coïncidant velut I & K in III, ac G & Q in IV. fig. tangat ibidem circulum recta, ut I F in priori, & G F in posteriori eum contingere cernitur.

[1] *per 5 primi.* [2] *per 13 & 32 primi.* [3] *per 28 primi.* [4] in casu fig. III, quoniam uterque angulorum A I F & G A L rectus est, rectæ I F, A B parallelæ erunt.

rent deſcribentes A L & O D, utpote ipſi I K F æquidiſtantes. Sint itaque ipſarum occurſus in B & C, ac per B agatur recta B N directrici K O æquidiſtans, occurrensque deſcribenti D O in N: eritque ut G A ipſi A I, ita [1] G B ipſi B F æqualis. Cum

[1] per 2 ſexti, & 14 quinti.

Fig. 1.



autem in triangulis L A K, O Q C æquales ſint anguli ad L & O, (propter [2] A L, C O parallelas,) ſitque & angulus L A K ſive G A L, id eſt, G I F, æqualis angulo O Q C, (quippe tam hic quàm ille cum angulo K Q G, vel K Q E duos rectos conſti-
tuit

[2] per 29 primi.

tuit [1],) [d] æquiangula erunt eadem triangula L A K & O Q C

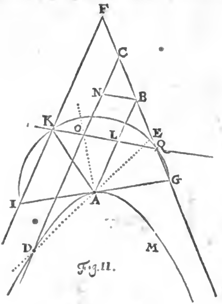


Fig. II.

sive [2] N B C. Porrò, quoniam angulus A G E angulo I K O seu A L O æqualis est, (quippe tam hîc quàm ille cum angu-

[1] in I & II fig. per 13 primi, & 2 tertii. in IV per 13 primi, & 18 ac 31 tertii.

[d] in casu fig. III apparet, tam angulum O Q C quàm L A K rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii : ac in fig. V & VI angulos G I F & O Q C æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem.

[2] *per 29 primi.*

lo I G Q sive I G F [3] binos rectos consti-

[3] *in fig. I, per 13 primi & 22 tertii, in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo I G Q æqualis est I K Q per 21 tertii.*

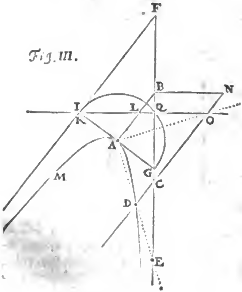


Fig. III.

tuit [e],) atque angulis L A G, O A D vel O A E iisdem sive æqualibus addito vel ablato communi O A G [f], compositi vel residui L A O, G A D vel G A E æquales quoque sunt, ac L O, A O sibi mutuò occurrant; G E quoque & A D sibi mutuò occurrant necesse est; sit itaque ipsarum occursus E punctum; & æquiangula erunt triangula, A G E, A L O, eritque propterea [4] A L ad A G, ut L O sive N B ad G E. At verò

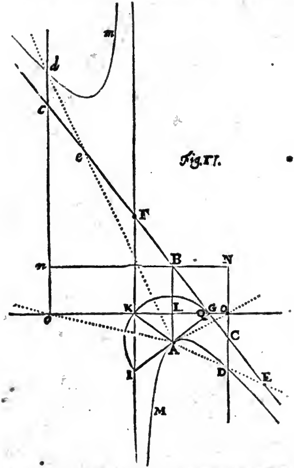
[e] in fig. II angulus A G E angulo A L O est æqualis, quia uterque cum angulo I K Q duos rectos constituit, per 29 primi & 22 tertii.

[f] vel, in casu fig. II & similibus, B A E.

[4] *per 4 sexti permut.*

(ob triangula LAK & NBC [1] similia) est quoque [2] eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per consequens erit [3], ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde [4] rectæ GE & BC, ideoque & GB seu [5] FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula

[1] per sup. dem.
[2] per 4 sexti.
[3] per 11 quinti.
[4] per 9 quinti.
[5] per sup. demonstr.



ABE & DCE [6] similia, [7] BE sit ad CE, hoc est [8], FC ad FB, ut BA ad CD: erit [9] rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accidat, ubi-

[6] per 29 primi.
[7] per 4 sexti.
[8] per sup. demonstr.
[9] per 16 sexti.

ubicunque in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur [1] curvam D A M Hyperbolam esse, cujus Asymptoti F I, F G. Quod erat ostendendum. [1] per 3 hujus.

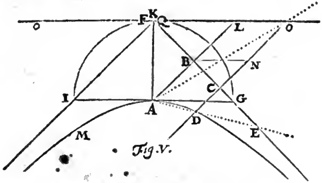


Fig. V.

Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu [2] contingens, ut I G, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* L A I & L A G rectos fore, si nempe *intervallum*, ut A L, æquidistans ductum sit ei Asymptoto cui *efficiens* seu contingens I G ad angulos rectos occur- [2] per 6 hujus.

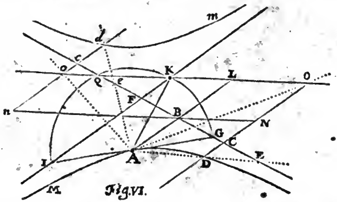


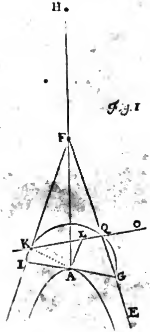
Fig. VI.

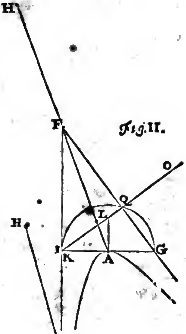
rit, ut in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asympto, cui eadem *efficiens* seu contingens G I occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

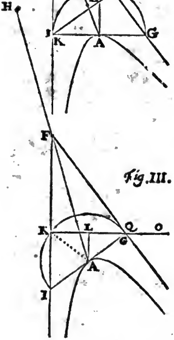
Itaque si vel Asymptotis F I, F G, & contingente I G; vel dia-

 metris

metris conjugatis H A, I G, Hyperbola ſit deſcribenda, ductis in caſu poſteriore Aſymptotis F I, F G, diametro I G circulus deſcribatur, qui ſecet utramque Aſymptoton, puta







in K & Q[a], ductâque per K & Q rectâ K O, cui ducta A L, Aſymptotorum alterutri, ut F I, æquidiſtans, occurrat in L: facillimè colligitur ex præmiſſis, ſi *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O, curva deſcribatur, eandem fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

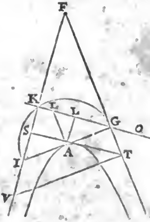
[a] aut alteram tangat, & alteram ſecet, ut in II fig. fit in I & Q, ac in III fig. in G & K.

Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum occurſus evitemus, hæc eadem abſque Circuli deſcriptione efficere expediet. Ita-

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K recta K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, *efficiente* I G, *intervallo* A L, ac *directrice* K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore judicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat recta S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumtum ut IF inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ continget quoque Hyperbolam quæsitam[1], propterea quòd sit V F ad I F, hoc est[2], I F ad S F, uti[3] T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G[4]; atque alteram secet in K, si per K & G ducatur recta K G O, eidemque occurrat ducta ab A, puncto medio tangentis I G, recta A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ *efficiente* I G, *directrice* K O, atque *intervallo* A L, ad eandem *efficientem*, dictamvè *directricem* perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modò exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.



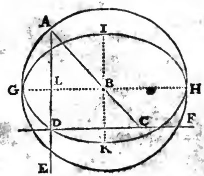
[1] per 9 hujus.
[2] ex hypothesi.
[3] per 2 sexti, & componendo per 18 quinti.
[4] per Cor. 16 tertii.

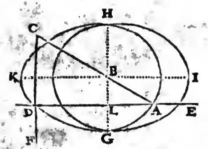
Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel

ita ut *describens* ad *directricem* datos quoslibet angulos efficiat quamcunque Hyperbolam in plano delineare haud difficile erit.

Cæterùm sequentem quoque Ellipsin in plano describendi rationem hîc adjecisse suum aliquando usum habebit.

Recta linea, ut A B C, ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C, in eadem utcunque assumptis (sive B sit inter A & C, sive C sit inter A & B,) promoveat rectas A D E, D C F, sibi ipsis semper æquidistantes, ac se invicem ad rectos angulos intersecantes: dico curvam, quæ continuâ earundem intersectione, veluti D, describitur, Ellipsin esse, cujus centrum est B, & axes G B H, I B K, nempe magnitudine ipsarum A B, B C duplæ, positione verò ipsis A D E, D C F, æquidistantes per B Polum ductæ, atque ibidem bifariam divisæ.





Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, applicentur ipsi *describentes* A D E, D C F in statione uti fuêre, cùm per illarum intersectionem descriptum est punctum D; noteturque porrò punctum, ubi earum alterutra, veluti A D E, vel hanc vel illam ductarum G H, I K, ex. gr., ipsam G H, secat, ut in L. & sit G A H circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est [1] A B quadratum ad B C quadratum, hoc est, G B quadratum ad B K quadratum, ut A L quadratum sive [2] G L H rectangulum ad L D qua-

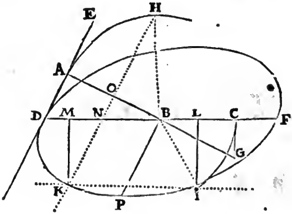
[1] per 2 & 22 sexti.
[2] per 14 secundi, vel 35 tertii.

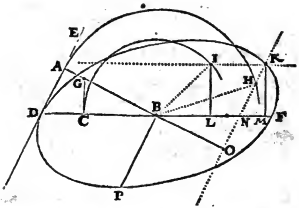
quadratum: constat [1], curvam G K H, uti prædictum est, descriptam Ellipsin esse, cujus axes sunt G H, I K.

[1] per 13 hujus.

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumferentiam fore.

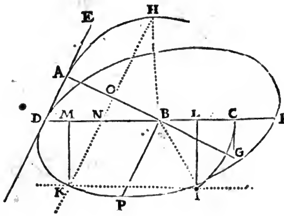
Non sit deinde A B C una linea recta, sed angulus quicunque, sive obtusus, sive acutus A B C, sintque prædictæ rectæ D A E,





D C F in punctis A & C ita junctæ, ut, cùm earum altera uni cruri

cruri coincidat, (quemadmodum in statione A B C recta D C F coincidit cruri B C,) altera ad reliquum crus sit perpendicularis, (sicut in eadem statione recta D A E ad crus A B perpendicularis est:) dico iterum, si angulus A B C circa Polum B circulariter motis punctis A & C in utroque crure utcunque assumptis promoveat rectas D A E & D C F sibi ipsis semper æquidistantes, cur-



vam, continuâ ipsarum intersectione, veluti D vel K, descriptam, Ellipsin esse, cujus semi-diametri magnitudine sunt rectæ D B, B G, nempe dictorum crurum, si opus fuerit, productorum, portiones à perpendicularibus A D, C G, per assumpta puncta A & C reciprocè ductis, ad Polum interceptæ; & quidem altera, uti D B, etiam positione; altera verò, ut B G, non item, sed B P ipsi æqualis, rectæque D A E æquidistans.

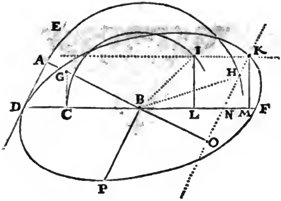
Sit enim prædictus A B C angulus in alia statione utcunque, ex. gr., in H B I; ideoque præfata intersectio ad K. Demissis autem ab I & K ad rectam D F, ipsius D B duplam, perpendicularibus I L, K M, notatisque intersectionem punctis ad N & O, quoniam æquales sive iidem sunt angulus A B C sive O B L & H B I, erunt quoque, addito vel ablato communi H B F, anguli H B O & I B L æquales; ideoque triangula H B O & I B L, ob angulos præterea ad O & L rectos [1], æquiangula. Sunt autem [2] &

[1] ex hypothesi, & per 29 primi.
[2] per 21 sexti.

& æquiangula triangula C B G & M N K, cum tam hoc quàm illud triangulo O B N simile sit[1]: quare cum sit [2] D B quadratum ad N B quadratum, ut A B quadratum, id est[3], H B quadratum, ad O B quadratum, erit[4] per conversionem rationis D B quadratum ad D N F[5] rectangulum, sicut H B quadratum ad H O[6] quadratum, id est[7], uti B I quadratum ad I L quadratum, vel uti B C quadratum ad K M quadratum[8], id est[9], uti B G sive B P quadratum ad K N quadratum, & permutando [10] D B quadratum ad

[1] ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N sive eosdem sive ad verticem.

[2] per 4 & 22 sexti. [3] ex hypothesi. [4] per Cor. 19 quinti. [5] per 5 secundi. [6] per 47 primi. [7] per 4 & 22 sexti. [8] æqualis est enim B C ipsi B I, & I L ipsi K M. [9] per 4 sexti, propter triangula C B G & M K N æquiangula. [10] per 16 quinti.



B P quadratum, ut D N F rectangulum ad K N quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva D K P F, intersectione uti prædictum est descripta [11], cujus semi-diametri conjugatæ D B, B P; ideoque B centrum, ac D A E contingens Ellipsin in vertice D [12].

[11] per 13 hujus.
[12] per 2 Cor. 13 hujus.

Notandum hîc est, quòd si rectus foret A B C angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superiùs per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavimus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes solummodo per similes intersectiones in præcedentibus exposuimus, per motum puncti in una eademque recta describi possunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ sunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propositas existimamus, hisce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumque* inventiones ac determinationes progredimur.

IOHANNIS DE WITT ELEMENTA CVRVARVM LINEARVM.

LIBER SECVNDVS.

CAPVT I.

PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæstione, ubi indagandus proponitur Locus, sive is sit ad lineam rectam, sive ad curvam, suppositis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel assumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, assumptum quodlibet quæsiti Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, postquam ad simplicissimos terminos erit reducta, si neutra incognitarum ad duas pluresve dimensiones assurgat, hoc est, si neque in se, neque in alteram incognitam ducta seu multiplicata reperiatur, quæsitus Locus erit linea recta: At si earundem incognitarum altera ad quadratum ascendat, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram incognitam ducta sit, erit Locus quæsitus Parabola. Quòd si verò utraque ad quadratum ascendat, sive altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non assurget, si de loco Plano Solidovè quæstio sit): erit Locus quæsitus vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia.

Quorum quidem omnium particularis determinatio, deſcriptio, & demonſtratio variis modis fieri poteſt; at verò ex ſimpliciſſimis, generaliſſimisque aliquem annotaſſe ſuffecerit.

Ac primo quidem caſu, cùm neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimenſiones aſcendit, ſi earum una exprimatur per x, atque altera per y, poteſt æquatio ad aliquam ſequentium formularum reduci.

I. $y \infty \frac{bx}{a}$, ſive (poſito $a \infty b$) $y \infty x$.

II. $y \infty \frac{bx}{a} + c$, ſive, poſito, ut ſupra, $y \infty x + c$.

III. $y \infty \frac{bx}{a} - c$, ſive $y \infty x - c$.

IV. $y \infty - \frac{bx}{a} + c$, ſive $y \infty - x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum ſecundùm regulam talis aſſumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipſius x, certum ſit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta poſitione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis linea priori in extremitate incerta in dato vel aſſumpto angulo conjungi. Quibus quidem ſuppoſitis, ea, quæ prædicta ſunt, ſequentibus Theorematis non incongruè proponi, determinari, ac demonſtrari poſſe videntur.

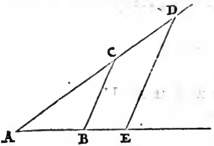
THEOREMA I.

Propoſitio I.

Si æquatio ſit $y \infty \frac{bx}{a}$, erit locus quæſitus linea recta.

Sit enim ipſius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè ſe extendere intelligatur. Dein, ſumpto in eadem A B puncto utcunque, veluti B, agatur B C in angulo

angulo A B C, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ A B ad ductam B C, quæ est a cognitæ ad b cognitam.



hoc est, ut sit uti a ad b, ita A B ad B C. Denique per puncta A & C ducatur recta A C, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in A C puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo D E A, dato vel assumpto æquali, si eadem D E vocetur y, erit [1] ut A B ad B C, hoc est, ut a ad b, ita A E ad E D, hoc est, ita x ad y. Et fit [2] $ay \infty bx$, hoc est, dividendo utrinque per a, erit $y \infty \frac{bx}{a}$.

[1] per 29 primi, & 4 sexti.

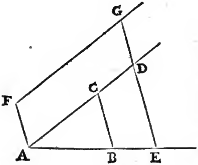
[2] per 16 sexti.

Quare cum punctum D utcunque sumptum sit in linea A C, erit eadem de omnibus aliis lineæ A C punctis demonstratio, ac proinde ipsa A C locus est quæsitus. Atque ita non solùm Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \infty \frac{bx}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta A F ipsi B C parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ F G parallelâ A C, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

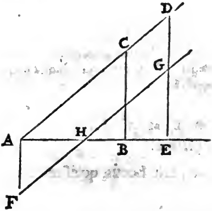
Sumpto enim in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG,

dato vel assumpto æquali, quæ secet rectam A C in D, si eadem
[1] per 29 primi, & 4 sexti. [2] per 16 sexti. G E vocetur y, erit E D ∞ $y - c$. At verò est, ut supra [1], uti A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y - c$: ac propterea [2] $ay - ac$ ∞ bx, vel ay ∞ $bx + ac$, adeoque, factâ divisione per a, y ∞ $\frac{bx}{a} + c$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Si æquatio sit y ∞ $\frac{bx}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1^mo, agatur insuper ex A recta A F, ipsi B C parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis c cognitæ. Et ex F ductâ iterum F G ipsi A C parallelâ, secante rectam A B in H, dico H G esse Locum quæsitum.

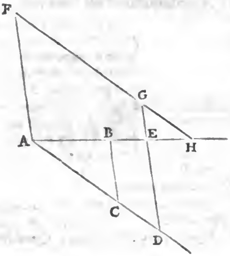
Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C
[3] per 29 primi, & 4 sexti. [4] per 16 sexti. in D, si eadem G E vocetur y, erit E D ∞ $a + c$. Iam verò est [3] ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $y + c$: ac propterea [4] $ay + ac$ ∞ bx, vel ay ∞ $bx - ac$, adeoque, factâ divisione per a, y ∞ $\frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

THEO-

THEOREMA IV.

Propositio 4.

Si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, erit Locus quæsitus linea recta.



Positis, factisque, ut in Theoremate 2do, excepto quòd punctum C ab opposita parte ipsius AB cadat, quodque angulus A B C æqualis sit dati vel assumpti anguli ad binos rectos complemento, quemadmodum in adjuncta figura apparet, agatur ex F recta F G ipsi A C parallela, occurrens rectæ A B in H: dico F H esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in F H puncto utcunque, veluti G, ductâque G E in angulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C in D, si eadem G E vocetur y, erit E D $\propto c - y$. Cumque sit [1] ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b, ita x ad $c - y$: erit propterea [2] $ac - ay \propto bx$, vel $ay \propto ac - bx$, id est, dividendo utrinque per a, $y \propto c - \frac{bx}{a}$. Quod erat propositum.

[1] per 13 & 29 primi, & 4 sexti.
[2] per 16 sexti.

At verò fieri etiam potest, ut per operationem, priusquam ad æquationem deveniatur, quantitatum incognitarum altera penitus evanescat, alteraque sola alicui cognitæ quantitati æqualis remaneat; atque exin-

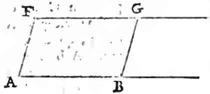
exinde binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

1. $y \infty c$, vel
2. $x \infty c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \infty c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x, quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ A F ∞c, faciente cum A B angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ad binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur F G ipsi A B parallela, dico eandem F G esse Locum quæsitum.

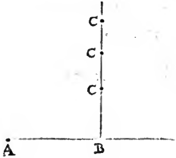
Etenim assumpto in F G puncto utcunque, veluti G, ductâque G B ipsi A F parallelâ, apparet eandem G B omnesque ipsi æquidistantes [1] rectæ A F fore æquales, hoc est, esse $y \infty c$. Quod erat demonstrandum.

[1] per 34 primi.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \infty c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea A B, quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo A B æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta B C. dico eandem B C, indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

cto utcunque, veluti C, erit ex hypothesi C B cum priore A B comprehendens angulum A B C dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem C B vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper A B, hoc est, $x \infty c$. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porrò secundo casu, supra expresso, cùm nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reductâ, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & yy \infty \; ax \\ \text{II.} & yy \infty \; ax + bb \\ \text{III.} & yy \infty \; ax - bb \\ \text{IV.} & yy \infty - ax + bb \end{array}\right\} \text{vel conversim} \left\{\begin{array}{l} ay \infty xx \\ ay + bb \infty xx \\ ay - bb \infty xx \\ bb - ay \infty xx. \end{array}\right.$$

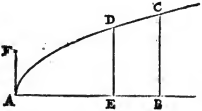
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latiùs explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \infty ax$, vel conversim $ay \infty xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam A B indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus vel assumptus angulus æqualis angulo A B C; Assumatur primò eadem A B ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo A B C, cujusque latus rectum A F

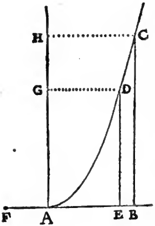


[1] per 10 Coroll. primi, & 4 Coroll. secundi hujus.

fit æquale a cognitæ. Dico Parabolam ADC, quæ [1] per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\infty\ a$, esse Locum quæsitum.

[2] per 1 primi hujus.

Sit enim in eadem curva ADC assumptum punctum utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED dato vel assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y, erit, ex natura Paraboles [2] quadratum ex ED ∞ FAE rectangulo, hoc est, $yy \infty ax$. Quod erat propositum.



Ad demonstrationem autem secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta AH ipsi BC parallela, atque eadem AH assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABC seu AHC æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola ADC Locus quæsitus.

[3] per 1 primi hujus.

Est enim [3] quadratum ex GD sive AE quadratum æquale rectangulo sub FA & AG, seu FA & ED, id est, $xx \infty ay$. Quod erat demonstrandum.

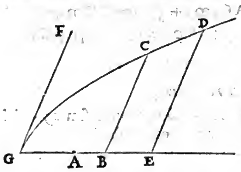
THEOREMA VIII.

Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \infty ax + bb$ aut conversim $ay + bb \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo ABC. Deinde producatur AB versùs A usque ad G, ita ut sit AG $\infty \frac{bb}{a}$; assumptâque GB pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cujusque latus rectum

rectum G F sit æquale *a* cognitæ: dico Parabolam G C D, quæ

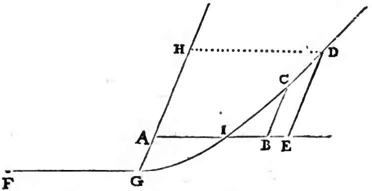


per prædictæ diametri verticem G descripta sit; habeatque latus rectum eidem diametro correspondens ∞ *a*, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, si ipsa D E vocetur y, quoniam G E sive A E + A G est ∞ $x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D ∞ rectangulo sub F G & G E, erit yy ∞ $ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut A G sit ∞ $\frac{bb}{a}$, di-



co, si ad G H diametrum latere recto G F ∞ *a* Parabola describatur ut G C, quæ secet rectam A B in I, curvam I D esse Locum quæsitum.

Est enim [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H con-

[2] per 1 primi hujus.

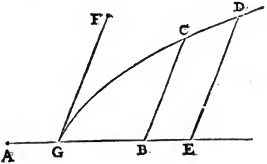
contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ac proinde, quoniam G H, sive D E + A G, $\infty\ y + \frac{bb}{a}$, atque F G $\infty\ a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb\ \infty\ xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy\ \infty\ ax - bb$ aut conversim $ay - bb\ \infty\ xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab A B recta A G $\infty\ \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam G C D esse Locum quæsitum.

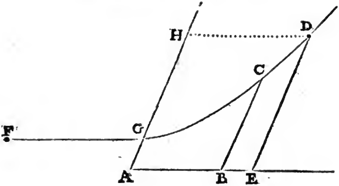


Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, erit ex natura Paraboles [1] quadratum ex E D seu yy æquale rectangulo sub F G & G E, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.

Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta A H ipsi B C parallela, atque ab ea subductâ A G $\infty\ \frac{bb}{a}$, sumatur G H pro diametro, &c. ut supra, dico curvam G C D fore Locum quæsitum.

Est



Est enim [1] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum æquale quadrato ex H D seu A E, ideoque, quoniam G H sive D E — A G æquatur $y - \frac{bb}{a}$, atque F G ∞ a, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay - bb \infty xx$. Quod erat propositum.

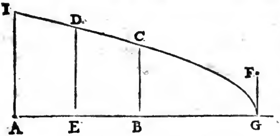
[1] per eandem.

THEOREMA X.

Propositio 10.

Si æquatio sit $yy \infty bb - ax$ aut conversim $bb - ay \infty xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit enim, ut supra, ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x in recta A B indefinitè se ab A extendere versùs B; angulus verò datus vel assumptus esto æqualis angulo

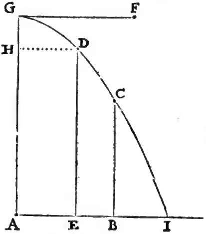


A B C. Deinde ab A versùs B assumptâ A G $\infty \frac{bb}{a}$ sumatur G A

pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto A B C, aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versùs A Parabola describatur, cujus latus rectum G F eidem diametro correspondens sit $\infty\ a$, quæque Parabola rectam A I ipsi B C parallelam secet in I: dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam G C I, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, demissâque D E ipsi C B parallelâ, si eadem D E vocetur y, cum [1] ex natura Paraboles quadratum ipsius D E sit æquale rectangulo sub F G & G E, & G E sive A G — A E sit $\infty\ \frac{bb}{a} - x$, ac F G $\infty\ a$, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \infty\ bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

[1] per 1 primi hujus.



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur A G ipsi B C parallela atque $\infty\ \frac{bb}{a}$, assumaturque G A pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quòd punctum intersectionis I sit in recta A E.

Cum enim ductâ D H ipsi A B parallelâ [2] ex natura Paraboles rectangulum sub F G & G H contentum sit æquale quadrato ex H D seu A E, sitque G H sive A G — E D $\infty\ \frac{bb}{a} - y$, atque F G $\infty\ a$, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \infty\ xx$. Quod erat propositum.

[2] per eandem.

Regula

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cùm Locus quæsitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

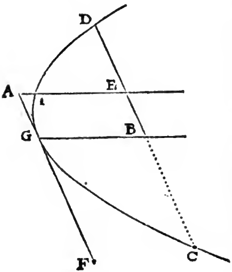
Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constituere reperitur, pro diversa dicti plani signo + vel — affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superiùs sunt explicata, haud difficile fit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VII.

Si æquatio fit $yy + 2ay \propto bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy:. habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc est, omissis iis quæ sese mutuò tollunt, erit $zz \propto bx$. Vnde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinitè extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF. Deinde, quoniam z est $\propto y + a$, si y supra lineam AE exsurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela,

ita

ita ut pars rectæ A F, omniumque ipsi parallelarum, intercepta inter A E & G B, veluti A G, æquetur a cognitæ. Porrò prædicta G B assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente G F latere recto, ipsi diametro G B correspondente, ∞b Parabola describatur, secans rectam A E in I: dico curvam I D indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.



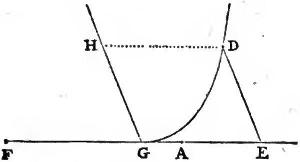
Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A F parallelâ, si eadem D E vocetur y, producaturque donec prædictæ diametro G B occurrat in B: erit ex constructione intercepta E B ∞a, ac proinde tota D B $\infty y + a$, hoc est, z. Quare cum ex natura Paraboles quadratum ex D B æquetur rectangulo sub F G & G B, vel F G & A E: erit quoque $zz \infty bx$, sive, restituto $y + a$ loco z, $yy + 2ay + aa \infty bx$, id est, $yy + 2ay \infty bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \infty bx - aa$, factâ assumptione secundùm Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $zz \infty bx$. Sed quoniam z eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\infty y - a$, idcirco quoque diameter G B (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam A E cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \infty xx + 2ax$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + a$, erit $v - a \infty x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque hujus

hujus quadratum loco xx: erit $by - aa \infty vv - 2av + aa, + 2av - 2aa$, hoc est, omissis iis, quæ se mutuò tollunt, erit $by \infty vv$.

Unde statim apparet, reductam esse æquationem ad formulam prædicti Theorematis septimi conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A,

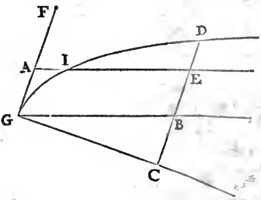


intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam A E indefinitè se extendere, sitque datus vel assumptus angulus, quem comprehendunt y & x, æqualis angulo A G H vel F G H. Deinde, quoniam v æquatur $x + a$, producenda est recta A E versùs A usque ad G, ita ut A G sit $\infty\ a$; & ex G ducenda est G H, faciens angulum E G H vel F G H dato vel assumpto angulo æqualem, ipsaque G H sumenda est pro Parabolæ diametro, ad quam si per ejus verticem G atque latere recto F G $\infty\ b$ Parabola describatur, ut G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi H G parallelâ, si eadem D E vocetur y, cum G E sit $\infty\ x + a$ seu v, atque ex natura Paraboles F G H rectangulum ∞ quadrato ex H D sive G E, erit $by \infty vv$, sive, restituto $x + a$ loco v, $by \infty xx + 2ax + aa$, seu $by - aa \infty xx + 2ax$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $by - aa \infty xx - 2ax$, eadem per omnia mutatis mutandis secundùm Regulam instituenda fuisset operatio, cecidissetque eo casu punctum G inter A & E.

Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, assumpto juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \infty z - \frac{bx}{a} - c$. Quo substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio: $zz \infty \frac{2bc}{a}x + bx$, aut $zz \infty dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d. Vnde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A F vel E A G. Deinde quoniam z est $\infty y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primùm est infra eandem recta G B ipsi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquentur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y, ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, sit $\infty y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ. Quare, cum G B seu A E indefinitè sumpta sit ∞x, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipsi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipsius G B inter G & dictas parallelas

rallelas interceptas, veluti B G, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a. Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b, ita G B ad B C: eritque B C $\infty \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi B C parallelæ, quæ à G B ad G C ducuntur, erunt $\infty \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra A E exsurgens, quæ possit esse y, postquam ad rectam G C erit producta, ut, exempli gratiâ, D C, erit $\infty y + c + \frac{bx}{a}$ seu z. Hujus igitur quadratum cum debeat esse ∞dx, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C, cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent ∞dx, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b; sitque itidem notus angulus G B C, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A F: erit propterea quoque [1] nota ratio G B ad G C, aliarumque similium, [1] per 6 quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum G B seu A E inde- sexti. finitè sumpta exprimatur per x, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty \frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx, idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo G F $\infty \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A E in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

Atque hîc, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam A E non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ

linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

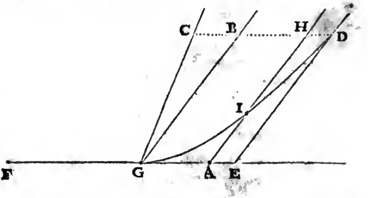
Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva I D punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, quæ protracta secet rectam G B in B, occurratque diametro G C in C, si D E vocetur y, cum E B seu A G sit $\infty\ c$, & B C $\infty\ \frac{bx}{a}$, erit tota D C $\infty\ y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, z. Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex D C ∞ F G C rectangulo, erit quoque ex antedictis $zz \infty dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco z, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundùm Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam z juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ G B non infra sed supra rectam A E, ut & G C non infra sed supra eandem G B ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \infty xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superiùs expositæ, assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} - c$. Vnde substituto hoc valore in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \infty vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $dy \infty vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematis V I I conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad

Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à puncto A per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque da-



tus vel assumptus angulus E A H vel F A H. Deinde, quoniam ex secunda parte Theorematis VII constat, prædictam Parabolam ita esse describendam, ut ordinatim applicatæ ad ejus diametrum sint ipsi A E parallelæ, debeantque juxta æquationem propositam æquales esse quantitati assumptæ v, hoc est, $x + \frac{by}{a} + c$, ducenda primùm est recta G B ipsi A H parallela, ita ut pars rectæ E A, versùs A productæ, ut & omnium ipsi æquidistantium, velut A G vel H B sit ∞ c cognitæ. Quo facto, cum quævis recta, quæ possit esse ipsi A E æquidistans & æqualis, ac proinde exprimi per x, ut, verbi gratiâ, D H, ad rectam G B producta; uti D B, æquetur $x + c$: ita porrò è puncto G ducenda, &, secundùm ea, quæ in præcedentibus explicata sunt, constituenda est Parabolæ diameter ab adversa parte ipsius G B, quàm est punctum E in recta G C, ut, si G B indefinitè vocetur y, B C, aliarumque omnium ipsi A E parallelarum inter eandem G C & rectam G B interceptæ partes exprimantur per $\frac{by}{a}$. Atque ita quælibet recta ipsi A E parallela, quæ possit esse x ad rectam G C producta, veluti D C, sit ∞ $x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cujus quidem quadratum cum æquale esse debeat alteri æquationis termino, nempe, dy: statim apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum G C,

cujus latus rectum G F ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent $\infty\ dy$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ G B ad rectam B C aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto E A H: erit quoque[a] ratio ipsius G B ad G C aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si G B sive E D indefinitè sumpta exprimatur per y, erit G C itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\infty\ \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy, idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ G F $\infty\ \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum G C inventam, ut supra dictum est, describatur Parabola G I D, secans rectam A H in I: dico curvam I D fore Locum quæsitum.

[a] per 6 sexti.

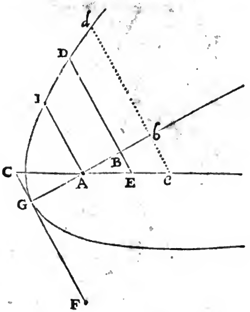
Sumpto enim in eadem puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A H, ut & D C ipsi A E parallelâ, quæ quidem D C secet rectas A H & G B in punctis H & B, occurratque diametro G C in puncto C: erit A E $\infty\ x\ \infty$ D H; E D $\infty\ y\ \infty$ G B; A G & H B $\infty\ c$; B C $\infty\ \frac{by}{a}$ ideoque tota D C $\infty\ x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v. Cumque ex natura Parabolæ rectangulum F G C sit æquale quadrato D C: erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy\ \infty\ vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v, itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d, atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc\ \infty\ xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facilè expli-

explicari, determinari, ac demonstrari queant; observatâ solummodo diversâ linearum positione, quæ ex signorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes similium locorum casus mox per generalem Regulam sim exhibiturus.

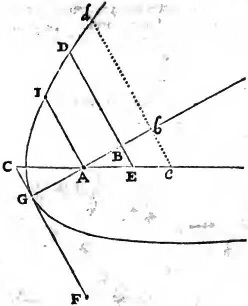
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis VIII.

Si æquatio sit $yy - \frac{bxy}{a} \infty - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \infty z + \frac{bx}{2a}$. quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, omissisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta: $zz \infty bx + dd$.



Vnde apparet, eandem esse reductam ad formulam Theorematis VIII, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus particularem descriptionem esto in adjuncta figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A per

per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A E D. Deinde, quoniam $z \infty y - \frac{bx}{2a}$, si y supra lineam A E exsurgere intelligatur, veluti E D, ducenda quoque est supra lineam A E ex puncto A recta A B, ita ut eadem sit ratio A E ad E B, quæ est ipsius $2a$ cognitæ ad b cognitam, hoc est, ut sit uti $2a$ ad b, ita A E seu x ad E B, eritque E B $\infty \frac{bx}{2a}$. idem intellige de omnibus aliis rectis ipsi E B parallelis, atque inter A E & A B interceptis, quæ quidem singulæ ipsi $\frac{bx}{2a}$ erunt æquales. Hinc,



quemadmodum ex supra dictis patet, si terminus dd in æquatione deficeret, prædicta A B Parabolæ diameter foret, cujusque vertex punctum A, &, positâ ratione A E ad A B, ut $2a$ ad e, latus rectum ipsi correspondens esset $\infty \frac{2ab}{e}$. Iam verò cum rectangulum, quod sub latere recto & portione diametri, inter verticem atque ordinatim applicatas interceptâ, continetur, æquale esse debeat $bx + dd$: manifestum est, si, iisdem positis, diameter

A B

A B versùs A producatur ad G, ita ut rectangulum sub prædicto latere recto & parte G A contentum sit $\infty\ dd$, rectam G B quæsitam fore diametrum, ejusque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc est per $\frac{2ab}{e}$, divisum æquari longitudini G A, ideoque G A fore $\infty\ \frac{dde}{2ab}$. Quare si diametro G B & latere recto G F $\infty\ \frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola describatur G D d, secans A I ipsi E D parallelam in I: dico curvam I D d fore Locum quæsitum.

Verùm obiter hîc quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: si nempe E A producatur ad C, ita ut A C sit $\infty\ \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipsi D E parallela ducatur C G, occurrens productæ A B in G: erit enim in eodem illo concursus puncto vertex quæsitus.

Demonstratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E in angulo A E D, dato vel assumpto æquali, secante diametrum G B in B: erit, ex constructione, B E $\infty\ \frac{bx}{2a}$; ideoque si E D vocetur y, erit D B $\infty\ y - \frac{bx}{2a}$ seu z; F G $\infty\ \frac{2ab}{e}$, G A $\infty\ \frac{dde}{2ab}$; A B $\infty\ \frac{ex}{2a}$, totaque G B $\infty\ \frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ D B quadratum sit æquale rectangulo F G B, erit, factâ multiplicatione ipsius z in se ipsam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz\ \infty\ dd + bx$. Unde substituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z, obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa}\ \infty\ bx + dd$, id est, $yy - \frac{bxy}{a}\ \infty\ -\frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem pro casu hujus exempli converso Parabola describenda sit, ex comparatione ejusdem cum antedictis facile est colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc\ \infty\ xx + \frac{2byx}{a} - cx$,

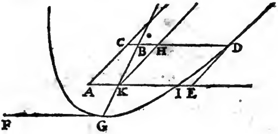
assumpto juxta Regulam $v \infty x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \infty v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$. quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, ablatisque iis, quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta.

$$by + \frac{1}{4}cc \infty vv.$$

Vnde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti Theorematis VIII conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjuncta figura, A E indefinitè assumptam esse quantitatem incognitam x, atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo E A C vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

A E indefinitè ∞x.
E D omnesque ipsi parallelæ ∞y.
A K $\infty \frac{1}{2}c \infty$ C H, quia K H parallela A C.



Vt a ad b, ita K H seu y ad H B: unde H B fit $\infty \frac{by}{a}$, & D B $\infty x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \infty v$.

Vt a ad e, ita K H seu y ad K B: unde K B (in qua diameter) fit $\infty \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum F G fit $\infty \frac{ab}{e}$.

$\frac{1}{4}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, divisus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{ccc}{2ab}$: unde KG fit $\infty \frac{ccc}{2ab}$, atque GB $\infty \frac{ccc}{2ab} + \frac{cy}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum FGB ∞ BD quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \infty vv$, vel $by \infty vv - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \infty xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{4}cc.$
$- \frac{1}{2}cc.$

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bbyy}{aa} + \frac{1}{4}cc \infty xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \infty ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \infty y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \infty z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejus quadrato loco yy, fient æquationis termini, ut sequitur: $zz \infty ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d, supponendo a esse majorem quàm $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \infty dx - \frac{3}{4}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eâdem breviter annotata sunt, colligere licebit.

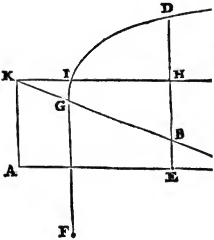
Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.
AE indefinitè ∞x.
ED omnesque ipsi parallelæ ∞y.
EAK vel AED, angulus quem x & y comprehendere debent.

$AK = \frac{1}{2}c$.

KH parallela ipsi AE.

Vt $2a$ ad b, ita KH seu x ad HB: unde HB erit $= \frac{bx}{2a}$.



Vt $2a$ ad e, ita KH seu x ad KB: unde KB (in quâ diameter) $= \frac{ex}{2a}$.

dx divisum per $\frac{ex}{2a}$, reddit $\frac{2ad}{e}$: unde latus rectum, quod sit FG, erit $= \frac{2ad}{e}$.

$\frac{3}{4}cc$ divisum per $\frac{2ad}{e}$, reddit $\frac{3cce}{8ad}$: unde KG fit $= \frac{3cce}{8ad}$, atque $GB = \frac{ex}{2a} - \frac{3cce}{8ad}$.

Hinc si GB diametro & latere recto FG per verticem G descripta sit Parabola, secans KH in I, erit ID Locus quæsitus.

Demonstratio.

Esto punctum D utcunque sumptum in ID, & DE ducta parallela ipsi AK, quæ si vocetur y; erit $HD = y - \frac{1}{2}c$, ac $DB = y - \frac{1}{2}c + \frac{bx}{2a}$, hoc est, z. Cujus quadratum cum æquetur rectangulo FGB, erit $zz = dx - \frac{3}{4}cc$, hoc est, $yy - cy + \frac{1}{4}cc + \frac{bxy}{a} - \frac{bcx}{2a} + \frac{bbxx}{4aa} = ax - \frac{bcx}{2a} - \frac{3}{4}cc$. Ac proinde, si utrinque demantur æquales, terminique ritè transponantur, habebitur $yy + \frac{bxy}{a} - cy = ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Quod erat propositum.

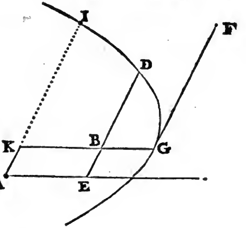
Atque hujus quidem exempli conversum, ut & cæteros casus huc spectantes, ex iis, quæ jam dicta sunt, simili modo reducere atque resolvere non difficile erit.

Exem-

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis X.

Si æquatio sit $ay - yy \infty bx$, sive, quod idem est, $yy - ay + bx \infty 0$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - \frac{1}{2}a$, erit $y \infty z + \frac{1}{2}a$. Quo substituto in locum ipsius y, & ejusdem quadrato loco yy, remanebit $zz \infty \frac{1}{4}aa - bx$. Vnde apparet, eandem esse reductam ad casum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem sunt demonstrata, Locum quæsitum esse Parabolam.

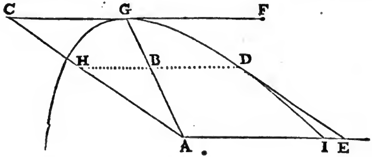
Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, eademque x se indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; sit autem datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K,



aut ipsius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z assumpta est $\infty y - \frac{1}{2}a$, si y supra rectam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta K G ipsi A E parallela, ita ut A K omnesque ipsi æquidistantes inter A E & K G interceptæ sint $\infty \frac{1}{2}a$. Quo facto, si juxta Regulam fiat K G $\infty \frac{aa}{4b}$, eademque sumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K parallelæ, cujusque latus rectum F G sit ∞b: erit ipsius portio descripta G D I, quæ inter verticem G & productam A K intercipitur, Locus quæsitus.

Etenim assumpto in curva G D I puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, quæ secet diametrum K G in B, si eadem D E vocetur y: erit D B $\propto y - \frac{1}{2}a$ seu z, ac G B sive G K — K B $\propto \frac{aa}{4b} - x$. Hinc, cum ex natura Paraboles quadratum ex B D sit æquale rectangulo F G B, erit $zz \propto \frac{1}{4}aa - bx$, hoc est, $yy - ay + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa - bx$, sive $yy - ay + bx \propto 0$, sive etiam $ay - yy \propto bx$. Quod erat propositum.

Si æquatio fuerit $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \propto \frac{2byx}{a} - xx$, sive, quod idem est, $xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa} + dy - cc \propto 0$: assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$. Quo substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, fiet, omnibus ritè ordinatis, $cc - dy \propto vv$. Vnde apparet casum esse Theorematis X conversim, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam. Quæ quidem ut specificè describatur, esto ipsius x initium immutabile A punctum, intelligaturque eadem x se extendere ab A versùs E indeterminatè, sitque angulus datus vel assumptus, quem y



& x comprehendunt, æqualis angulo E A H aut ipsius ad duos rectos complemento. Deinde sumatur in A H recta A C $\propto \frac{cc}{d}$, ducaturque ex C recta C F ipsi A E parallela, atque in eadem sumptâ C G, quæ se habeat ad C A, ut cognita b ad a cognitam, hoc est, ut sit uti a ad b, ita A C ad C G, agatur A G, eaque pro diametro Parabolæ sumatur, quæ per verticem G versùs A erit describenda. Porrò cum in triangulo A C G ob rationem cognitam laterum

A C,

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet AC ad AG, quæ sit ut a ad e; erit, AC existente $\infty \frac{cc}{d}$, AG $\infty \frac{cce}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum cc, dividatur, orietur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat GF $\infty \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæsitæ Parabolæ, diametro GA correspondens; atque idcirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut GDI, secans AE in I: dico IDG curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque DE ipsi AH, ac DBH ipsi AE parallelis, si eadem DE exprimatur per y, erit quoque AH ∞y. Cumque sit ut AC ad CG, id est, ut a ad b, ita AH ad HB: erit HB $\infty \frac{by}{a}$, ideoque cum DH seu AE sit ∞x, erit DB $\infty x - \frac{by}{a}$ seu v. Similiter cum sit ut AC ad AG, hoc est, ut a ad e, ita AH seu y ad AB: erit AB $\infty \frac{ey}{a}$, & GA — AB seu GB $\infty \frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum FGB sit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipsius FG seu $\frac{ad}{e}$ in GB seu $\frac{cce}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius BD seu v in se ipsam, $cc - dy \infty vv$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v, erit $cc - dy \infty xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - cc \infty \frac{2byx}{a} - xx$.
Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Obiter autem & hîc notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuisse, hoc modo:

Cum AH indeterminatè sit ∞y, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG, ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipsi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, sit $\infty \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter AH & AB similesque, ut a ad e: ideoque cum AB indeterminatè sit $\infty \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy

per

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis F G $\infty \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quæsita A G.

Plura hîc exempla subjungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porrò quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothesi non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuslibet propositis exemplis seu casibus in hypothesi facilè applicare valeat: quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

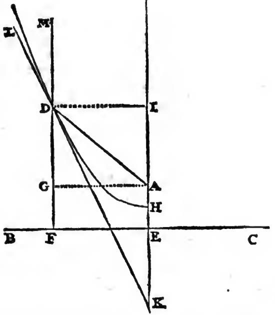
PROBLEMA I.

Propositio 11.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quæstioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A, & data positione recta linea B C, oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ D A, D F, quarum hæc ad datam B C intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ductâ perpendiculari A E, quæ vocetur a, ac suppositis juxta Regulam binis lineis E F, F D incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum E F D comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior E F vocetur x, ac posterior F D nominetur y; si ducta præterea intelligatur A G ipsi E F æquidistans, erit in triangulo rectangulo A G D basis A D $\infty\ y$, utpote ∞ ductæ D F; latus verò A G seu recta E F $\infty\ x$, & G D, sive (si punctum G cadat inter D & F) F D — A E, aut (si punctum D inter F & G cadat) A E — F D $\infty\ y - a$. Vnde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit $yy \infty xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruunt, omnibusque ritè ordinatis, erit $2ay - aa \infty xx$. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversim, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta

ea, quæ ibidem exposita sunt, ex E ducatur recta E I indefinitè extensa atque ipsi F D æquidistans ; & ab eadem auferatur recta E H $\infty \frac{aa}{2a}$, id est, $\frac{1}{2}a$: erit describendæ Parabolæ diameter in dicta E I, (quæ quidem diameter axis quoque est, propter angulum E F D rectum) vertex autem in H, ac parameter ∞ $2a$. Vnde, per ea quæ libri primi capite primo exposita sunt, Parabolam ipsam describere facillimum erit. Cumque porrò axis punctum A, utpote quod ab H vertice distat quartâ ipsius parametri parte, id ipsum sit, quod vulgò Parabolæ Focus seu Vmbilicus nuncupatur, apparet ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Vmbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis est axis portioni per applicatam ab eodem puncto abscissæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Constat enim ex antedictis rectam A D, utcunque assumptum fuerit in curva punctum D, si per idem illud ad axem ordinatim applicata sit D I, æqualem esse perpendiculari D F, hoc est, rectæ I E, nempe axis portioni, per applicatam D I abscissæ, & per verticem H, longitudine H E ∞ $\frac{1}{4}a$, id est, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifestum quoque est ex antedictis, si positis quæ supra, & productâ F D, uti ad M, per assumptum punctum D contingens ducta sit, ut L D K, angulum F D K sive M D L angulo A D K æqualem esse.

Occurrat enim contingens L D K axi producto in K, eritque [1] recta I H ipsi H K, ideoque (æqualibus H E, A H utrinque additis) recta I E, hoc est, A D, ipsi A K æqualis; ac proinde [2] & angulus A D K angulo A K D, hoc est, angulo F D K sive M D L æqualis sit necesse est.

[1] *per 1 Cor. 2 primi huius.*
[2] *per 5 primi.*

CA-

CAPUT III.

Tertio autem casu supra expresso, cùm nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

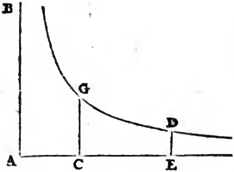
$$\text{I. } yx \propto ff.$$
$$\text{II. } \frac{lyy}{g} \propto xx - ff.$$
$$\text{III. } yy - ff \propto \frac{lxx}{g}.$$
$$\text{IV. } \frac{lyy}{g} \propto ff - xx.$$

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \propto ff$, Locus quæsitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A B, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in A E recta A C $\propto f$, ducaturque C G eidem æqualis ac ipsi A B parallela, descriptâque [1] per punctum G atque



[1] *per ea quæ in Corol. ad* 11 & 12, *nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.*

que Asymptotis A E, A B Hyperbolâ G D: dico curvam G D esse Locum quæsitum.

Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A B parallelâ, erit ex natura Hyperboles [1] rectangulum A E D rectangulo A C G, hoc est, quadrato ex A C æquale. Hinc, cum A E sit assumpta pro incognita quantitate x, & E D vocetur y, erit $yx \propto ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

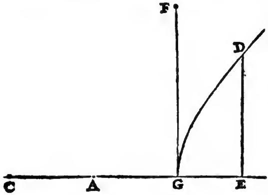
[1] per 3 primi hujus.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim l ipsi g æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \propto xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac facilè apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F,



quòd si tam A G quàm A C fiant $\propto f$ cognitæ, ac G F sumatur $\propto$ G C, centroque A, & transversâ diametro C G ipsi G F lateri recto sive parametro æquali describatur [2] Hyperbola, ut G D, eandem curvam G D fore Locum quæsitum.

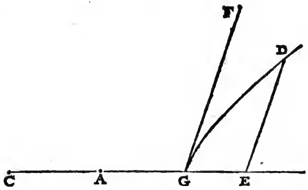
Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, erit [3] ex natura Hyperboles, cùm C G & G F supponantur æquales, quadratum ex D E æquale rectangulo C E G.

[2] per ea quæ cap. ult. primi hujus ostensa sunt.

[3] per 10 primi hujus.

CEG. Hinc, si DE vocetur y, cum ex hypothesi CE seu AE + AC sit $\infty\ x+f$, & GE sive AE — AG $\infty\ x-f$, erit $yy \infty xx-ff$.

At verò si l & g sint inæquales, apparet esse, ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy. Ac proinde si juxta ea, quæ supra exposita sunt, non jam parameter GF diametro transversæ CG æqualis, sed ut l ad g,



ita fiat transversa diameter CG ad GF parametrum, cæteraque omnia, ut supra, eodem mòdo quæsito erit satisfactum.

Est enim [a] ex natura Hyperboles, ut FG ad GC, ita ED quadratum ad CEG rectangulum, hoc est, ut g ad l, ita yy ad $xx-ff$, unde, revocando proportionem ad æqualitatem, erit $lyy \infty gxx-gff$. Ac proinde si utraque hujus æqualitatis pars dividatur per g, erit $\frac{lyy}{g} \infty xx-ff$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

[a] *per 10 primi hujus.*

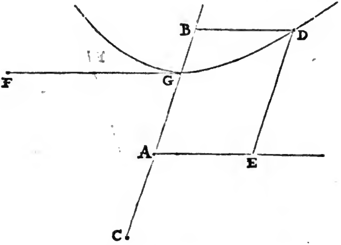
THEOREMA XIII.

Propositio 14.

Si æquatio sit $yy-ff \infty \frac{lxx}{g}$, erit Locus quæsitus Hyperbola.

Ad cujus determinationem specificam esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, ipsaque x sic ab A versùs

E in linea A E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo E A G aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, cum ſit ut l ad g, ita $yy-ff$



ad xx, ſtatim apparet, ſi tam A G quam A C ſumantur æquales f cognitæ, fiatque ut l ad g, ita C G ad G F (quæ quidem G F ſit ipſi A E parallela), ac poſtea centro A, tranſverſâ diametro C G, & parametro G F Hyperbola deſcribatur G D, eandem curvam G D fore Locum quæſitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A G, ac D B ipſi A E parallelâ, ſi eadem D E vocetur y, erit C B, hoc eſt, D E + A C, ∞ $y+f$; & B G, ſive D E — A G, ∞ $y-f$, ideoque C B G rectangulum ∞ $yy-ff$. Dein cum [a] ex natura Hyperbolæ ſit ut C G ad G F, hoc eſt, ex hypotheſi ut l ad g, ita rectangulum C B G ad D B ſive A E quadratum, id eſt, ita $yy-ff$ ad xx: erit $gyy-gff$ ∞ lxx, hoc eſt, $yy-ff$ ∞ $\frac{lxx}{g}$: Quod demonſtrandum, determinandumque erat.

[a] per 10 primi hujus.

THEO-

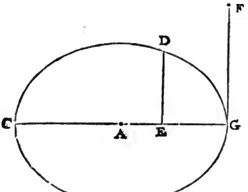
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$, erit Locus quæsitus Ellipsis.

At verò cum Ellipseos species, quæ latera rectum & transversum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, sit Circuli circumferentia: palam fit casu proposito Locum quæsitum etiam Circuli peripheriam esse posse.

Hinc ad prædicti Loci determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se per lineam A E ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



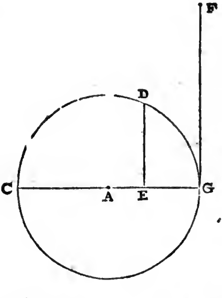
tur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo A G F. Porrò cum sit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy: facilè apparet, si tam A G quàm A C sumantur æquales f cognitæ; fiatque ut l ad g, ita C G ad G F, ac centro A, transversâ diametro C G, & parametro G F [1] Ellipsis describatur G D C eandem curvam G D C fore Locum quæsitum.

Sum-

[1] *per 7 Corol. 13 & 1 Cor. 14 primi hujus, ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejusdem lib. tradita sunt.*

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi F G parallelâ, erit [1] ex natura Ellipseos ut F G ad G C, ita E D quadratum ad C E G rectangulum. Hoc est, si E D vocetur y, cum C E sit $\infty f + x$, & E G $\infty f - x$, erit ut g ad l, ita yy ad $ff - xx$, unde $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod erat propositum.

[1] per 13 primi hujus.



Cæterùm liquidò constat, si C G & G F æquales fuerint, hoc est, si $l \infty g$, quòd etiam C E G rectangulum quadrato E D æquale sit futurum. Ideoque si angulus C G F sit rectus, curvam G D C fore Circuli circumferentiam.

Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione existunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor casuum præcedentium, totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non modò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utraque in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque unius præterea dimensionis in æquatione reperiatur, constituens planum cum alia, sive cognitâ sive incognitâ,

tâ, ſive etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate: oportet loco incognitarum, aut illarum alterutrius, aſſumere alias vel aliam, quæ ipſas excedunt, vel ab iis deficiunt; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita, in cujus locum nova non eſt aſſumpta, planum conſtituere reperitur, ſi nempe incognitarum neutra in ſe ipſam in æquatione ducta ſit; ſin ſecus, dimidio tantùm ejus quantitatis, quæ planum conſtituit cum incognita, in cujus locum aſſumptio facta eſt, caſu utroque juxta differentem affectionem per ſigna + vel —, quæ præfiguntur iiſdem illis quantitatibus, ita ordinatis, ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reïterato, ubi opùs, ſi ad formulas Parabolarum, capite ſecundo expoſitas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor ſuprapoſitorum caſuum reducta erit æquatio, ac proinde ipſi convenientem Locum determinare ac deſcribere, per ea quæ ſuperiùs explicata ſunt, haud difficile erit.

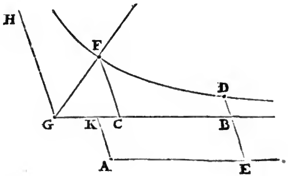
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XI.

Si æquatio fuerit $yx - cx + by \propto ee$: aſſumpto $z \propto y - c$, & $v \propto x + b$, erit $z + c \propto y$, & $v - b \propto x$.

Vnde ſi ſecundùm Regulam ubique in æquatione loco y ſubſtituatur $z + c$, erit $zx + cx - cx + bz + bc \propto ee$, ſive $zx + bz + bc \propto ee$; ac rurſus ſi loco ipſius x ſubrogetur $v - b$, erit $zv - bz + bz + bc \propto ee$, id eſt, $zv \propto ee - bc$. aut, (ſi loco termini $ee - bc$, qui in totum cognitus eſt, ſcribatur ff) $zv \propto ff$. Et apparet æquationem reductam eſſe ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæſitum eſſe Hyperbolam.

Ad cujus ſpecificam determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura initium ipſius x immutabile punctum A, atque eadem x per rectam AE indefinitè ſe extendere intelligatur, ſitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK

aut ejuſdem ad duos rectos ſupplemento. Deinde, quoniam *z* eſt $\infty\, y - c$, ſi *y* ſupra lineam A E exſurgere concipiatur, ducenda quoque eſt ſupra eandem recta K B ipſi A E parallela; ita ut pars rectæ A K, omniumque ipſi æquidiſtantium, inter A E & K B intercepta, veluti A K, æquetur *c* cognitæ. Porrò, quoniam *v* eſt $\infty\, x + b$, producenda eſt ipſa B K per K uſque ad G, ita ut K G ſit



$\infty\, b$. Quo facto, erit G centrum ipſius curvæ, & G B una Aſymptotωn, eritque altera ipſi A K parallela, ut G H. Vnde ſi juxta Regulam prædicti Theorematis X I in recta G B ſumatur G C æqualis *f* cognitæ, ducaturque C F eidem G C æqualis, ac parallela rectæ A K vel G H, atque per punctum F, Aſymptotis G B & G H, ſive Aſymptoto G B atque ad axem G F, Hyperbola deſcribatur F D: dico curvam F D fore Locum quæſitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipſi A K parallelâ, quæ ſecet rectam K B in B, ſi eadem D E vocetur *y*, erit D B ſive D E — E B $\infty\, y - c$, id eſt, *z*. Eſt autem & G B ſive A E + G K $\infty\, x + b$, hoc eſt, *v*. Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum G B D æquetur G C quadrato, erit quoque $z\, v \infty ff$. aut reſtitutis $y - c$ loco ipſius *z*, & $x + b$ in locum ipſius *v*, atque $ee - cb$ loco ff, erit $yx - cx + by - cb \infty ee - cb$, hoc eſt, $y\, x - c\, x + b\, y \infty e\, e$. Quod erat propoſitum.

Exem-

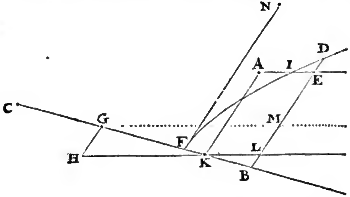
Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematis XII & XIII.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \propto z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum ipsius y, atque ejusdem quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Et factâ congruâ transpositione, $zz \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque fractione remaneat, fiet $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + \frac{aaex + 2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \propto x + \frac{aae + 2abc}{2fa + 2bb}$, ut terminus quoque æquationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat, habebitur $x \propto v \frac{-aae - 2abc}{2fa + 2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, ablatisque iis quæ se invicem tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut vitetur prolixior operatio loco $\frac{aae + 2abc}{fa+bb}$ scribatur $2h$, ita ut fiat æquatio $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + 2hx \frac{+aadd + aacc}{fa+bb}$. Tum assumpto $v \propto x + h$ seu $x \propto v - h$, eoque substituto loco x in æquatione, ac ejusdem quadrato loco xx: erit $\frac{aazz}{fa+bb} \propto vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Unde apparet, ante omnia hîc esse considerandum, utrum hh sit majus quàm $\frac{aadd + aacc}{fa+bb}$, an contra. si enim majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æquatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E ab A versùs E indefinitè se extendere intelligatur; sitque angulus

quem x & y comprehendunt æqualis angulo E A K aut ipſius ad duos rectos ſupplemento. Porrò quoniam $z \infty y + c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, ut E D, ducenda primùm eſt infra eandem A E recta K L ipſi A E parallela; ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K, E L, &c. æquetur c cognitæ. Deinde productâ L K uſque ad H, ita ut K H ſit ∞ b, ideoque H L indefinitè ſumpta ∞ $x + b$, hoc eſt, z, ducatur per H punctum recta H G ipſi A K parallela, ita ut K H ad H G ſit, ut a ad b. Quo facto, ſi per puncta G & K recta agatur linea G K B, habebunt omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B in-



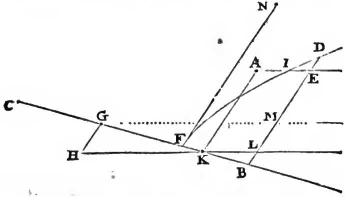
tercipiuntur (ut, exempli gratiâ, L B), ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut, verbi gratiâ, L K) eandem rationem, quæ eſt inter b & a: hoc eſt, erit ut a ad b, ita K L ad L B, cum utraque ſit ut K H ad H G. Ideoque cum K L ſive A E indefinitè ſumpta ſit ∞ x, erit L B, ut & quælibet ipſi parallela, inter K L & K B intercepta, $\infty \frac{bx}{a}$: ac proinde omnis linea ſupra A E rectam exſurgens, quæ poſſit eſſe y incognita, ad rectam K B producta, veluti D B ſive D E + E L + L B erit ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, hoc eſt, z. Vnde apparet, juxta Regulam lineam G B ſumendam eſſe pro Hyperbolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ ſint ipſi A K ſeu D B parallelæ: eritque ejuſdem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad i. Quare cum GM seu HL indefinitè sit v, GB quoque indefinitè concepta, hoc est, quælibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{iv}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{iivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{iivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{iivv}{aa}$ dividatur per vv, fiet quotiens $\frac{ii}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per ii, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{iizz}{fa+bb} \infty \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd+iicc}{fa+bb}$. Vnde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa}\frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut ii ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut secet rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y, erit ex ante dictis DB ∞ z. Est autem, ut jam annotatum, GB ∞ $\frac{iv}{a}$, atque ex hypothesi GF seu GC ∞ $\sqrt{\frac{iibb}{aa}\frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, ideoque BC ∞ $\frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{iibb}{aa}\frac{-iidd-iicc}{fa+bb}}$, ac BF ∞ $\frac{iv}{a}$ —

 $\sqrt{\frac{iibb}{aa}}$

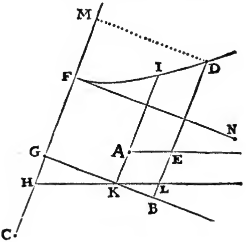
$\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd - iicc}{fa+bb}}$, & rectangulum C B F $\propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa+bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles N F ad F C, seu $fa + bb$ ad ii sit, ut D B quadratum, hoc est, zz, ad prædictum rectangulum C B F: erit $\frac{iizz}{fa+bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa+bb}$,



Multiplicetur jam utrinque per aa, & dividatur per ii, eritque $\frac{aazz}{fa+bb} \propto vv - bb + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Dein restituto $x + b$ loco v, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + 2bx + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$; itemque $\frac{eaa + 2bca}{fa+bb}$ loco $2b$, exurget $\frac{aazz}{fa+bb} \propto xx + \frac{eaax + 2bcax}{fa+bb} + \frac{aadd + aacc}{fa+bb}$. Porrò multiplicatis omnibus per $fa + bb$ iisque divisis per aa, habebitur $zz \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò bb minus quàm $\frac{ddaa + ccaa}{fa+bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa+bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{ddii + ccii}{fa+bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa + bb$, ac producto divisо

divisō per ii, factâque decenti transpositione, eadem cum sequenti $zz - dd - cc + \frac{fahh + bbbb}{aa} \infty \frac{iivv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac divis. per ii, id est, $\infty \frac{favv + bbvv}{aa}$. erit formulæ Theorematis XIII, unde Locus quæsitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus specificam determinationem & descriptionem, postquam ut in præcedenti figura ductæ sunt lineæ A E, A K, K L, K H, H G, & G K B: erit quidem, ut supra, G centrum, at verò non erit diameter in linea G K, sed, juxta Regulam, in linea H G producta

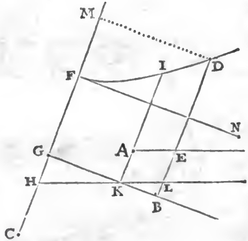


ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi G K B parallelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transversæ diametri, nempe G F vel G C, æquale $\sqrt{dd + cc \frac{-fahh - bbbb}{aa}}$, ac ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii. Quare si fiat, ut $fa + bb$ ad ii, ita C F ad F N, quæ quidem F N ipsi G K B æquidistans sit, erit F N parameter: ac proinde si centro G transversâ diametro C F & parametro F N Hyperbola describatur F D, secans ipsam A E vel K A productam in I, erit I D curva Locus quæsitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque D B ipsi A K (sive G F), & D M ipsi G B parallelâ, si

E D

ED vocetur y, erit, ut supra, DB sive MG ∞z, & BG sive DM $\infty \frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC $\infty \sqrt{dd+cc\frac{-fahh-bbhh}{aa}}$, erit CM $\infty z+\sqrt{dd+cc\frac{-fahh-bbhh}{aa}}$, & MF $\infty z-\sqrt{dd+cc\frac{-fahh-bbhh}{aa}}$, ac propterea rectangulum CMF $\infty zz-dd-cc\frac{+fahh+bbhh}{aa}$. Est autem DM quadratum $\infty \frac{iivv}{aa}$.



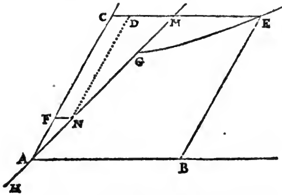
Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM quadratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa+bb$, ita $\frac{iivv}{aa}$ ad $zz-dd-cc\frac{+fahh+bbhh}{aa}$: erit quoque $zz-dd-cc\frac{+fahh+bbhh}{aa} \infty \frac{favv+bbvv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per aa, ac divisis per $fa+bb$, factâque transpositione cogniti termini, erit $\frac{aazz}{fa+bb} \infty vv-hh\frac{+ddaa+ccaa}{fa+bb}$. Dein restitutis $x+h$ loco v, $\frac{caa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, atque $y+\frac{bx}{a}+c$ loco ipsius z, expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy+\frac{2bxy}{a}+2cy \infty \frac{fxx}{a}+ex+dd$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Si

Si æquatio sit $xx + 2ay \infty \frac{2bxy}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \infty 0$. Assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{by}{a}$, erit $x \infty v + \frac{by}{a}$, eoque substituto in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, sublatisque iis quæ se invicem destruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \infty 0$. &, factâ congruâ transpositione, $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per bb, $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$. Dein, assumpto $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, habebitur $y \infty z + \frac{a^3}{bb}$, eoque substituto in æquatione loco ipsius y, atque ipsius quadrato loco yy, erit $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$, sive $zz - \frac{a^6}{b^4} \infty \frac{aavv}{bb}$. Qui quidem casus est Theorematis 13tii, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A B ab A versùs B indefinitè sese extendere intelligatur, sitque angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo A B E. Deinde, quoniam ex antedictis facilè colligitur Hyperbolam hoc casu & similibus ita esse describendam, ut ordinatim ad ejus diametrum applicatæ sint ipsi A B æquidistantes, ductâ rectâ A C ipsi B E parallelâ, quoniam $v \infty x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò est recta A M; ita ut omnium ipsi A B parallelarum partes, inter A C & A M interceptæ, veluti C M, ad partes ipsius A C inter A & dictas parallelas interceptas, veluti A C, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a; hoc est, ut sit quemadmodum a ad b, ita A C ad C M. Vnde si A C seu B E indefinitè sumpta vocetur y, erit C M & similes $\infty \frac{by}{a}$, ac describendæ Hyperboles diameter in dicta A M. Porrò, quoniam $z \infty y - \frac{a^3}{bb}$, si ab A C auferatur A F $\infty \frac{a^3}{bb}$: erit F C indefinitè sumpta ∞z, &, ductâ F N ipsi A B parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ N D ipsi F C æquidistantis & æqualis ad rectam D M aliarumque similium sit cognita, nempe ut a ad b, sitque itidem notus angulus

NDM, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto angulo ABE, erit quoque ratio ND ad NM aliarumque similium nota, quæ sit ut a cognitæ ad e itidem cognitam.



Hinc cum ND seu FC indefinitè sumpta exprimatur per z, erit NM itidem indefinitè sumpta $\infty \frac{ez}{a}$, cujus quidem quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituere debeat, multiplicanda est suprascripta æquatio per ee, productumque dividendum per aa, ita ut fiat $\frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4} \infty \frac{eevv}{bb}$. Quo peracto, si juxta Regulam semi-latus transversum fiat NG vel NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut ee ad bb; iisdemque lateribus ac diametro & centro jam inventis Hyperbole describatur GE: dico curvam GE esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti E, ductâque EB in angulo ABE, dato vel assumpto æquali, nec non EC ipsi AB parallelâ, secante diametrum AM in M; si eadem EB, hoc est, AC, vocetur y, erit, ut supra, CM $\infty \frac{by}{a}$, ac proinde ME, sive AB—CM, $\infty x - \frac{by}{a}$, hoc est, v. Est autem, ut superiùs annotatum, NM $\infty \frac{ex}{a}$, atque ex hypothesi NG seu NH $\infty \frac{eaa}{bb}$, ideoque HM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{eaa}{bb}$, & MG $\infty \frac{ex}{a} - \frac{eaa}{bb}$, ac proinde rectangulum

gulum HMG $\infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$: hinc cum ex natura Hyperboles ſit ut latus rectum ad tranſverſum, ſive ut bb ad ee, ita ME quadratum, id eſt, vv, ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \infty \frac{eezz}{aa} - \frac{eea^4}{b^4}$, &, multiplicatis omnibus terminis per aa, factoque per ee diviſo, $\frac{aavv}{bb} \infty zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein reſtituto $y - \frac{a^3}{bb}$ in locum ipſius z, exurget $\frac{aavv}{bb} \infty yy - \frac{2a^3y}{bb}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb, factoque diviſo per aa, habebitur $vv \infty \frac{bbyy}{aa} - 2ay$. Denique reſtituto $x - \frac{by}{a}$ in locum ipſius v, expunctiſque iis quæ ſe invicem deſtruunt, atque omnibus ritè ordinatis, fiet $xx + 2ay \infty \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propoſitum.

PROBLEMA II.

Propoſitio 16.

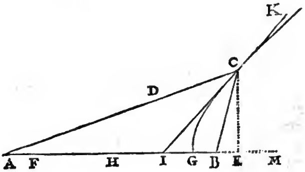
Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac deſcribere, quem quæſitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG ſeu AD.

Quoniam in quæſtione angulus datus non eſt, quò facilior ſit operatio, aſſumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, ſi opùs fuerit, intelligatur demiſſa perpendicularis, ut CE; tum, ſuppoſitis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, aſſumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x, ac poſterior, nempe EC, nominetur y, ipſa autem AB, ſeu datorum punctorum cognita diſtantia, vocetur a, & data FG ſive AD exprimatur per b. Hinc cum BE ſive (ſi punctum B cadat inter A & E) AE — AB, aut (ſi punctum E inter A & B cadat) AB — AE ſit

$\infty\, x - a$, & A C $\infty \sqrt{xx+yy}$, at B C $\infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$; sitque A C — A D ∞ B C: æquatio erit
$\sqrt{xx+yy} - b \infty \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbyy \infty 4aaxx - 4bbxx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbaa + b^4$.
Vnde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty xx - ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x, atque ejusdem quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invi-

Fig. 1.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa-bb} \infty vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12^{mi} hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur A H $\infty \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta H G ab una, & H F ab altera parte,) $\infty \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa F G (quæ quidem, ob applicatam C E ad diametrum H E perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\infty\, b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Vnde per ea quæ libri primi capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porrò cum quadratum semidiame-

diametri transversæ sit ꝏ $\frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri ꝏ $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Atqui cum FB sive BH + HF sit ꝏ $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG sive BH — HG ꝏ $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG ꝏ $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$, nempe ꝏ quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgo oppositarum Hyperbolarum Foci sive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Si ab assumpto utcunque in Hyperbola puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversi axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusvè, quòd sciam, non nisi per multas ambages longâque difficilium Theorematum concatenatione hactenus demonstratum sit: id ipsum hîc demonstratione unicâ, & quidem breviore satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, transversus axis FG, atque Vmbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque [1] AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Vnde cum sit [2], ut

HF*q* ad GAF, ita FEG ad CE*q*: erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut

HF*q* ad (HF*q* + GAF, id est [3], ad) HA*q*; ita FEG ad FEG + CE*q*; adeoque [4] ut

HF*q* ad HA*q*, ita (HF*q* + FEG sive [5]) HE*q* ad HA*q* + FEG + CE*q*. Est autem quoque [6], ut

HF*q* ad HA*q*, ita HE*q* ad HM*q*. Quocirca [7]

HM*q* ꝏ HA*q* + FEG + CE*q*; hoc est, addito utrinque HF*q* seu HG*q*, erit

[1] *per 16 sexti.* [2] *ex hypoth. & per 10 primi hujus.* [3] *per 6 secundi.* [4] cum sit ut una antecedentium ad unam conseq., ita omnes antecedentes ad omnes conseq. *per 12 quinti.* [5] *per 6 secundi.* [6] *ex constructione & per 22 sexti.* [7] *per 9 & 11 quinti.*

[1] per 6 secundi.

$$HMq + \left\{\begin{array}{l} HFq \\ \text{seu} \\ HGq \end{array}\right. \infty \left\{\begin{array}{l} HAq \\ \text{seu} \\ HBq \end{array}\right. + (HFq + FEG, \text{i.e.}^{1})HEq, + CEq.$$

Hinc additis vel sublatis ab utraque æquationis parte æqualibus,

[2] per 4 secundi.

$$\text{nimirum} \left\{\begin{array}{l} FHM \\ \text{seu} \\ GHM \end{array}\right. \text{bis ab una, \&} \left\{\begin{array}{l} AHE \\ \text{seu} \\ BHE \end{array}\right. \text{bis ab altera parte; erit}^{2}$$

[3] per 47 primi. [4] per 7 secundi. [5] per 47 primi.

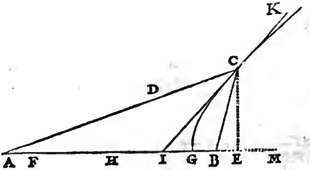
$FMq \infty (AEq + CEq$, id est [3]) ACq; itemque [4] $GMq \infty (BEq + CEq$, id est [5]) BCq. Cumque propterea FM sit ꝏ AC; & GM ꝏ BC; sitque ipsarum FM & GM differentia FG, manifestum est ipsarum quoque AC & BC majorem superare minorem, ejusdem FG, nempe axis transversi, longitudine. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, quæ angulum iis comprehensum bifariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & conversim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, secet eandem, si fieri potest,

Fig. 1.

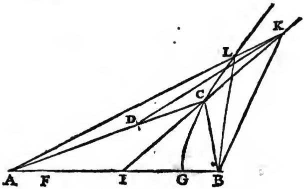


atque ita saltem aliquo sui puncto, veluti K, intra Hyperbolam sit.

Tum

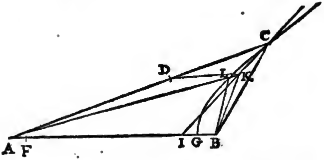
Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

Fig. II.



circa[1] æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porrò, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quàm est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

Fig. III.



ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit[2], non secat Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia

recta,

[1] Cum enim ex hypothesi anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

[2] per 20 primi.

recta Hyperbolam contingere quàm I C K[1], manifestum est conversim, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque A B C bifariam dividere.

[1] per 3 Corol. 6 primi hujus.

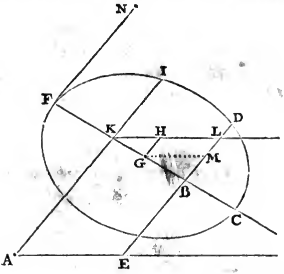
Exemplum reductionis æquationum ad formulam Theorematis XIV.

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \infty - xx + dx + kk$, assumpto juxta Regulam $z \infty y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y \infty z + c - \frac{bx}{a}$, eoque substituto in locum ipsius y, ejusdemque quadrato loco yy, sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a} - cc \infty - xx + dx + kk$. id est, factâ decenti transpositione, erit $zz \infty - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ sive $zz \infty \frac{-aaxx + bbxx}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito autem a majore quàm b, ac multiplicatis omnibus æquationis terminis per aa, productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx absque fractione inveniatur, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx \frac{+ daax - 2bacx}{aa - bb} + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Iam verò si facilioris operationis gratiâ loco $\frac{daa - 2bac}{aa - bb}$ substituatur $2b$: erit æquatio $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - xx + 2bx + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2bx \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$.

Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - b$ sive $x \infty v + b$, atque hoc in locum ipsius x, ejusque quadratum loco xx substituatur, ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aazz}{aa - bb} + vv - bb \infty \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositione, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \infty - vv + bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV, ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferentiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco $\frac{aa}{aa - bb}$ scribatur $\frac{l}{g}$, & loco $bb + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff, ita ut æquatio sit talis $\frac{lzz}{g} \infty ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac deſcriptionem eſto in appoſita figura ipſius x initium immutabile A punctum, atque eadem x ſe in linea A E ab A versùs E indefinitè extendere intelligatur, ſitque angulus datus vel aſſumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejuſdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam z ꝏ $y - c + \frac{bx}{a}$, ſi y ſupra lineam A E exſurgere intelligatur, ducenda quoque eſt ſupra ipſam recta K L eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipſi æquidiſtantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,



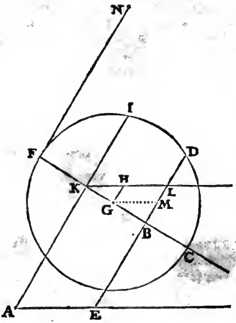
E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam K L ducenda eſt recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipſi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B intercipiuntur (veluti L B) ad partes ipſius K L, inter eaſdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ eſt inter b & a, hoc eſt, ut ſit uti a ad b, ita K L ad L B. Atque ita poſitâ K L ſive A E, indefinitè ſumptâ, ꝏ x, L B omneſque ipſi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Vnde ex prædictis conſtat diametrum fore in recta K B,

ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi A K æquidistantes. Iam verò cum v sit $\infty\ x - b$, à recta K L sive A E auferenda est K H, ita ut eadem K H sit $\infty\ b$, ideoque H L indefinitè quoque sumpta $\infty\ x - b$ seu v. Deinde per punctum H ducenda est H G ipsi A K parallela, secans inventam diametrum in G, eritque idem intersectionis punctum G quæsitæ Ellipseos centrum. Porrò quoniam similium triangulorum K H G & K L B nota est ratio lateris K H ad H G sive K L ad L B, ut & angulus sub iisdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel assumpto E A K, erit quoque nota ratio lateris K H ad latus K G sive K L ad K B, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum H L sive G M, quæ ipsi H L parallela intelligitur, indeterminatè sumpta sit $\infty\ v$, erit G B, similiter indeterminatè sumpta, hoc est, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\infty\ \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum constituat, æquatio supra exposito modo ita reducatur, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, si singuli æquationis termini multiplicentur per ee, productumque dividatur per aa. inde enim sequenti modo se habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa}\ \infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc si juxta Regulam semi-latus transversum G F vel G C fiat $\infty\ \sqrt{\frac{eeff}{aa}}$, id est, $\frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris C F ad rectum latus F N, ut lee ad gaa, iisdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipsis describatur F D C, secans rectam A E vel A K productam in I: erit curva I D C Locus quæsitus.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque D E ipsi A K parallelâ, ac si opùs sit productâ ut secet rectas K L & K B in L & B, si eadem D E vocetur y, erit D B, hoc est, D E $-$ E L $+$ L B $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$ seu z. Est autem ut jam annotatum est G B $\infty\ \frac{ev}{a}$, atque ex constructione G F vel G C $\infty\ \frac{ef}{a}$, ideoque F B $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & B C $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum F B C $\infty\ \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipsis sit ut N F ad F C, hoc est,

ut

ut gaa ad lee, ita D B quadratum, hoc eſt, zz ad prædictum rectangulum F B C; erit $\frac{leezz}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id eſt, multiplicatis omnibus per aa, ac diviſis per ee, erit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$, ideoque reſtituto $x - h$ loco v, atque $hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff, ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$, erit $\frac{aazz}{aa - bb} \propto hh + \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx + 2hx - hh$, hoc eſt, $\frac{aazz}{aa - bb} + xx - 2hx \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Porrò reſtituto $\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$, fiet $\frac{aazz}{aa - bb} + xx \frac{- daax + 2bcax}{aa - bb} \propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id eſt, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac diviſione per aa, erit $zz + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx \div \frac{2bcx}{a} \propto cc + kk$.



Ac denique loco z factâ reſtitutione ipſius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletisque iis quæ ſe invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebitur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto - xx + dx + kk$. Quod determinandum ac demonſtrandum erat.

Notandum porrò hîc eſt, quòd ſi angulus A K B foret rectus, ac proinde ordinatim applicatæ, ut D B, K I, &c. ad diametrum K B perpendiculares, ac ſimul F N æqualis F C, prædictam curvam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perſpicuum eſt.

PROBLEMA III.

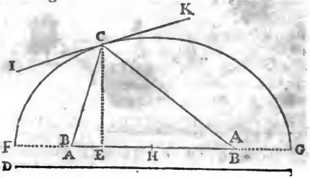
Propositio 17.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ simul sumptæ datæ longitudini æquales sint; locumque determinare ac describere, quem quæsitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, utputa C; ita nempe, ut ductæ rectæ C A, C B simul sumptæ æquales sint datæ rectæ lineæ D.

Quoniam in quæstione angulus datus non est, quò facilior sit operatio, assumatur rectus; ideoque à puncto C in rectam A B, quæ data puncta conjungit, productam, si opùs fuerit,

Fig. I.



intelligatur demissa perpendicularis, ut C E. Tum suppositis, juxta Regulam, A E & E C incognitis atque indeterminatis assumptum angulum rectum A E C comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum A E, vocetur x, ac posterior, nempe E C, nominetur y; ipsa autem A B seu datorum punctorum distantia cognita appelletur a, & data D exprimatur per b. Hinc cum B E sive (si punctum E cadat inter A & B) A B — A E, aut (si punctum B inter A & E cadat) A E — A B sit $\infty\, a - x$; atque A C $\infty\, \sqrt{xx+yy}$; & C B $\infty\, \sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; sitque D — A C ∞ C B: æquatio erit $b - \sqrt{xx+yy}\ \infty\ \sqrt{aa-2ax+xx+yy}$; factâque operatione

ne decenti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit
$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \infty b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$,
hoc est, factâ divisione per $4bb - 4aa$, erit
$xx - ax \infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb - aa}$. Assumpto deinde juxta Regulam $v \infty x - \frac{1}{2}a$, erit $x \infty v + \frac{1}{2}a$, eâque substitutâ in locum ipsius x, ejusdemque quadrato loco xx, expunctisque iis quæ se invicem destruunt: erit $xx \infty \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb - aa}$, sive $\frac{bbyy}{bb - aa} \infty \frac{1}{4}bb - xx$. Qui quidem casus est Theorematis 13^{tii}, ac proinde Locus quæsitus Ellipsis. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versùs E sumatur AH $\infty \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-diameter transversa (velut HF ab una, & HG ab altera parte) $\infty \frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad eandem perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit ∞b. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Vnde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi exposita sunt, quæsita Ellipsis facillimè describetur. Porrò cum quadratum semi-diametri transversæ sit $\infty \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum FB seu GA sit $\infty \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & BG seu AF $\infty \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum FBG seu GAF $\infty \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò Ellipseos Foci sive Vmbilici nuncupantur. Vnde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

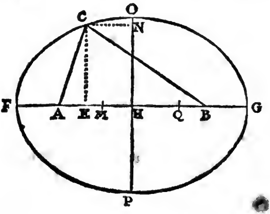
Corollarium 1.

Quæ à quolibet in Ellipsi puncto ad utrumque Vmbilicum rectæ ducuntur, simul sumptæ transverso axi æquales sunt.

Quemadmodum autem in Hyperbola superiùs demonstratum est, ductarum CA, CB differentiam transverso axi FG æquari, ita & hîc earum aggregatum eidem transverso axi æquale esse ostendetur, nempe, si non per additionem & compositionem, ut

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituatur. Quod ipsum tamen, adhibitâ nonnullâ mutatione, elegantiùs quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto qualibet Ellipsis F C G, cujus centrum H, axis major F G, minor O P, atque Vmbilici A & B; adeoque rectangulum F B G ut & G A F æquale quadrato semi-secundæ diametri H O.



Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis C A, C B, ordinatim ad utrumque axem applicentur C E, C N; & fiat ut H F ad H A, ita H E ad H M, adeò ut [1] A H E rectangulo æquale sit rectangulum F H M; sumaturque H Q æqualis ipsi H E. Hinc cum sit [2] ut H F *q* ad H A *q*, ita H E *q* ad H M *q*, erit quoque per conversionem rationis ut H F *q* ad G A F seu [3] H O *q*, id est [4], ut C N *q* sive H E *q* ad O N P, ita idem H E *q* ad E M Q; ac proinde [5] æqualia sunt rectangula O N P & E M Q. Quocirca cum [6] H M *q* unà cum E M Q, id est, cum O N P rectangulo, æquale sit H E *q*; sitque & H F *q* [7] æquale quadratis rectarum H A & (H O [8] seu [9]) C E unà cum rectangulo O N P: erunt H M *q* + O N P + H F *q* æqualia H E *q* + H A *q* + C E *q* + O N P. Ac proinde si utrinque auferatur O N P rectangulum, remanebunt bina quadrata rectarum H M & H F seu H G simul æqualia tribus quadratis rectarum H E, H A seu H B, & C E.

Hinc

[1] *per 16 sexti.*
[2] *per 22 sexti.*
[3] *ex hypothesi.*
[4] *per 13 primi hujus ejusque Corol. 1*
[5] *per 9 quinti.*
[6] *per 5 secundi.*
[7] *per 5 secundi.*
[8] quippe quadr. ex H O æquale est G A F rectang. ex hypoth.
[9] *per 5 secundi.*

Hinc additis ablatisvè ab utraque æquationis parte æqualibus, nimirum F H M seu G H M bis ab una, & A H E seu B H E bis ab altera parte: erit [1] F M q æquale (A E q + C E q, id est [2],) A C q: itemque [3] G M q æquale (B E q + C E q, id est [4],) B C q. Cumque propterea recta F M æquetur ipsi A C, & G M ipsi B C: erit ipsarum A C & B C aggregatum transverso axi F G æquale. Quod demonstrandum erat.

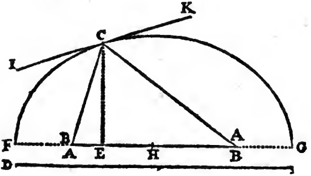
[1] per 7 secundi.
[2] per 47 primi.
[3] per 4 secundi.
[4] per 47 primi.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Ellipseos puncto ad utrumque Vmbilicum rectis, si per idem illud punctum altera recta agatur, æquales cum utraque ducta angulos constituens, eadem curvam in dicto puncto contingit; & contra.

Si enim recta I C K ita ducta, ut æquales sint anguli A C I, B C K, non contingat Ellipsin in C puncto, secet eandem, si fieri potest, in C & K. Deinde productâ A C ad L, ita ut tota A L

Fig. 1.



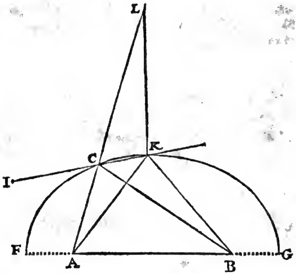
axi F G, ideoque [5] adjecta C L ipsi C B æqualis sit, jungantur A K, B K, L K. Cum igitur, in triangulis L C K, B C K latera L C, C K lateribus B C, C K, utrumque utrique, circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis L K basi B K æqualis. At verò cum punctum K in Ellipsi supponatur, erunt,

[5] per Corol. 1 hujus.

per

per Corollarium præcedens, rectæ A K, K B, hoc est, latera A K, K L simul sumpta transverso axi F G, ideoque & basi A L

Fig 11.



æqualia, quod est absurdum [1]. Non igitur secat recta I C K Ellipsin, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia recta Ellipsin contingere quàm I C K [2], manifestum est, è contra quoque eam, quæ Ellipsin in C contingit, efficere angulos A C I, B C K æquales.

[1] per 10 primi.
[2] per 17 primi huius.

CAPVT IV.

Regula universalis inveniendi ac determinandi loca quælibet plana & solida.

Iam verò his omnibus ita præmissis, pro generali Regula concludi potest, æquationes omnes, quæ in indagatione Locorum prædicto modo obvenire atque obtingere possunt, ita ut in iis neutra quantitatum incognitarum in se ducta, neque factum sub iisdem ad solidum

lidum excurrat, sed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua sequentium formularum constare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci posse: nimirum,

1^{mò}. $\begin{cases} y \infty \frac{bx}{a}, \text{ sive, quod idem est, } y \infty x: \text{ cum supponi possit esse } a \infty b. \\ y \infty \frac{bx}{a} \ 8 \ c, \text{ vel } y \infty c - \frac{bx}{a}. \end{cases}$

Signum 8 significat + vel —.

Sed hîc notandum, fieri etiam posse, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evanescat, alteraque sola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, sicut superiùs expositum est.

2^{dò}. $\begin{cases} yy \infty dx, \text{ aut conversim } dy \infty xx. \\ yy \infty dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \infty xx. \\ zz \infty dx, \text{ aut conversim } dy \infty vv. \\ zz \infty dx.ff, \text{ aut conversim } dy.ff \infty vv. \end{cases}$

3^{tiò}. $\begin{cases} yy \infty \frac{lxx}{g}.ff. \\ zz \infty \frac{lxx}{g}.ff. \\ yy \infty \frac{lvv}{g}.ff. \\ zz \infty \frac{lvv}{g}.ff. \end{cases}$ sive etiam $\begin{cases} yx \infty ff. \\ zx \infty ff. \\ yv \infty ff. \\ zv \infty ff. \end{cases}$

Supponendo ubique y & x esse quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò z esse quantitatem assumptam, & quæ composita sit ex y 8 aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x, permixta sit; atque v quidem assumptam quoque esse, sed eo casu constare solummodo ex x 8 aliâ quantitate cognitâ, absque ulla ipsius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v esse ∞ x 8 aliâ quâdam quantitate,

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eo quidem casu z ex y 8 aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundùm signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

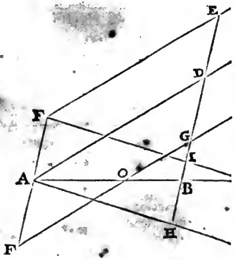
Vt autem prædicta Loca specificè determinentur sive prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitatum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituant in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea A B, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus A B E, quem faciunt quantitates y & x, in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cùm Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \infty x$ vel $y \infty \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea A B punctum utcunque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut H B E, ita ut angulo A B E præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut A B & B D sint æquales, vel ut A B sit ad B D, sicut a ad b, atque ex A per punctum D ducatur recta A D: erit eadem A D indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c, ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ A B quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta A F ipsi H B E parallela atque æqualis c cognitæ; ductâque F E vel F G, quæ rectam A B secet in O, ipsi A D parallelâ: erit F E vel O G indefinitè producta Locus quæsitus.

Sed

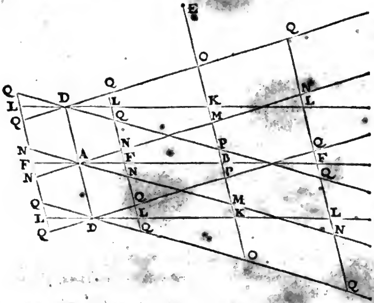
Sed si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea H B E sumendum est ab altera parte lineæ A B, quâ datus vel assumptus angulus A B E existit, punctum H, ita ut A B ad B H sit, sicut a ad b; ductâque A H, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ A B, quâ sumptum est punctum H, ducenda est F I ipsi A H parallela: eritque eadem F I producta donec cum linea A B coïncidat Locus quæsitus.



Etenim, cum tam A B quàm B D sit $\propto x$, aut A B ad B D ab una, ut & A B ad B H ab altera parte, sit ut a ad b; ac proinde B D vel B H $\propto \frac{bx}{a}$: itemque, cum A F seu D E vel D G ut & H I sint æquales c cognitæ: erit B E sive B D + D E $\propto \frac{bx}{a} + c$, & B G sive B D — D G $\propto \frac{bx}{a} - c$, ac B I sive H I — H B $\propto c - \frac{bx}{a}$. Unde cum punctum B sumptum sit utcunque, eadem erit de omnibus aliis, in linea A B, prædictisvè locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas A D, F E, F G, & F I esse Loca quæsita. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

At verò si juxta formulas sub N°. 2 exhibitas Locus quæsitus sit linea Parabolica, erit

I. Primo casu, quando æquatio est $yy \propto dx$, ipsa A B Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo A B E æquales, atque ejusdem vertex A punctum.



II. Secundo casu positâ æquatione $yy \propto dx . ff$, manente diametro in eadem linea A B, sumptâque, ut in sequenti figura, A F $\propto \frac{ff}{d}$, erit ejusdem vertex in puncto F. Quod quidem punctum F, si uterque terminus tam dx quàm ff signo + sit affectus, ab altera parte puncti A, quâ est punctum B, sumendum est; sed si vel terminus dx, vel terminus ff signo — affectus sit, ab eadem parte puncti A, quâ est punctum B, sumi debet: & quidem si terminus dx signo + affectus sit, ab A versùs B Parabola describenda est; sin contra terminus dx signo — affectus fuerit, in contrariam partem, ab F nempe versùs A, describi debet.

At

At si æquatio sit $zz \propto dx$, vel $zz \propto dxff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y \pm c$, vel pro $y \pm \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y \pm c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela atque $\propto c$; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ A B, quam conceptus est angulus A B E: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D contra ad alteram partem lineæ A B cadat. Deinde ductâ D K ipsi A B parallelâ, erit in eadem D K Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $zz \propto dx$.

IV. Sed si sit $zz \propto dx.ff$, qui sit quartus casus, sumptâ D L $\propto \frac{ff}{d}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel — affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel — adfectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter $\propto d$.

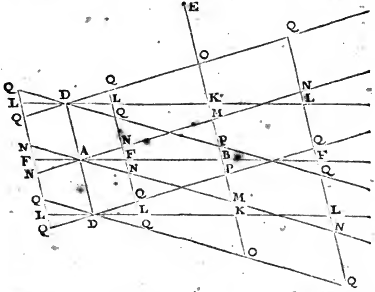
V. Si verò z assumpta sit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea B E puncto M, ita ut sit A B ad B M, sicut a ad b, (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ A B, quâ conceptus est angulus A B E, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$.) ducenda est per puncta A & M recta A M: eritque A M eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo A M E æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis L F L, quæ intersecent supra dictas diametros A M vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo — affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique z assumpta sit pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a} \; 8 \; c$, ductâ, ut modò expositum fuit, A D ∞ c, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum + vel — affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ A B sumi debet) ducenda est recta D O ipsi

VII. A M, quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta D P parallela ipsi A M, quæ est ab adversa parte lineæ A B, atque eadem D O vel D P sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo D O E vel D P E æquales: eritque vertex punctum D, si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum D O vel D P diametrorum & linearum L F L communis intersectio, videlicet punctum Q, quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum + vel — affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut A B ad A M, hoc est, erit ut A M ad A B, ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratiò perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parametris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta O E utcunque sumpta, & supponatur easdem Parabolas prædictam applicatam secare in E puncto: & primo casu, cum pars diametri A B inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti A B, concipiatur, ut x, ac singulæ illæ applicatæ, ut y; sitque Parameter $\propto d$, atque ex natura Parabolæ [1] rectangulum sub dicta Parametro & recta A B contentum sit $\propto$ B E quadrato: erit $dx \propto yy$. [1] per 1 primi hujus.

Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \propto dx \; 8 \; ff$, punctum B in linea F B ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \propto ff - dx$, cum juxta Regulam Parabola in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse. id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \propto ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \propto dx$, terminus ff major est quàm dx, utpote eundem excedens quantitate yy; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d, $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x. Quare cum secundum Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ A F, & $x \propto$ rectæ A B, erit similiter recta A F major quàm A B: ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet. id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porrò quoniam A F est $\propto \frac{ff}{d}$, erit F B (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, A B 8 A F, atque etiam A F — A B) æqualis $x \; 8 \; \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eâque multiplicatâ per parametrum d, fit rectangulum $dx \; 8 \; ff$, atque

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ B E
2. sive yy, ac proinde $yy \infty dx \; 8 \; ff$, atque $yy \infty ff - dx$.

Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in recta D K, quoniam A D seu B K est ∞c: erit K E, hoc est, $BE - BK \infty y - c$; & K B E, hoc est, $BE + BK \infty y + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y \; 8 \; c$, erit K E & K B E ∞z. Est autem D K seu A B ∞x, parameterque ∞d, & rectangulum sub dicta Parametro & recta D K contentum ∞ quadrato ex K E vel K B E. Quare cum hoc quadratum sit ∞zz, atque
3. rectangulum illud ∞dx, erit $zz \infty dx$.

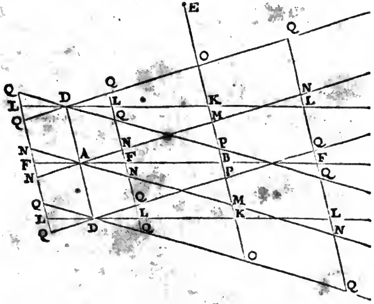
Quarto casu, ubi manente diametro in recta D K vertex est in puncto L, quoniam D L sive A F est $\infty \frac{ff}{d}$, erit L K (hoc est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, D K 8 D L, atque etiam L D — D K) æqualis $x \; 8 \; \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$. quâ multiplicatâ per Parametrum d, fit rectangulum $dx \; 8 \; ff$, atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ K E vel K B E, hoc est, zz: eritque proinde $zz \infty dx \; 8 \; ff$, atque
4. $zz \infty ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in recta A M, cum sit ut a ad b, ita A B, hoc est, x, ad B M: erit $BM \infty \frac{bx}{a}$, ideoque M E, hoc est, $BE - BM \infty y - \frac{bx}{a}$, & M B E, hoc est, $BE + BM \infty y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu z assumpta est pro $y \; 8 \; \frac{bx}{a}$, erit M E & M B E ∞z. At cum in triangulo A B M cognita sint & angulus A B M, & ratio laterum A B, B M, dictum angulum comprehendentium, nota quoque est [a] ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in specie etiam lateris A B ad A M, quæ sit ut a ad e. Ac proinde cum sit ut a ad e, ita A B, h.e., x ad A M: erit $AM \infty \frac{ex}{a}$. Cumque porrò juxta Regulam eo casu sit ut A M ad A B, hoc est, ut e ad a, ita d ad Parametrum: erit Parameter $\infty \frac{ad}{e}$. Quâ multiplicatâ per A M seu $\frac{ex}{a}$ fiet rectangulum ∞dx. Quod æquale est quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz; ac proin-
5. de est $zz \infty dx$.

[a] per 6 sexti.

Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in recta N M, quoniam est ut A B ad A M, ita A F ad A N, hoc est, ut a ad e, ita $\frac{ff}{d}$ ad A N: erit A N $\propto \frac{eff}{ad}$, & N M (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, A M $\pm$ A N, atque etiam N A — A M) æqualis $\frac{ex}{a} \pm \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum $dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit quadrato applicatæ M E vel M B E, hoc est, zz: erit

6. $zz \propto dx \pm ff$, atque $zz \propto ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in recta D O, quoniam A D seu M O est $\propto c$, erit O E (sive B E — B M — M O) $\propto y - \frac{bx}{a} - c$, & O B E (sive B E + B M + M O) $\propto y + \frac{bx}{a} + c$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - d$, vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit O E & O B E $\propto z$. Porrò cum D O

 seu

seu A M sit $\infty \frac{cx}{a}$, Parameterque sectionis $\infty \frac{ad}{c}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D O contentum $\infty\ dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ O E vel
7. O B E, id est, zz: erit $zz \infty dx$.

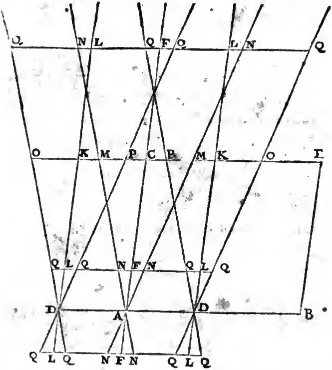
Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D, diameter est in recta D P, quoniam A D seu B K est $\infty\ c$, & K P $\infty \frac{bx}{a}$, erit P E una (sive B E — B K + K P) $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, & P E altera (sive B E + B K — K P) $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque P E $\infty\ z$. Porrò cum D P seu A M sit $\infty \frac{cx}{a}$ ac Parameter $\infty \frac{ad}{c}$, erit rectangulum sub Parametro & recta D P contentum $\infty\ dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque ap-
8. plicatæ P E, hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q, & diameter in recta Q O vel Q P, quoniam, ut supra, O E est $\infty\ y - \frac{bx}{a} - c$, atque O B E $\infty\ y + \frac{bx}{a} + c$; at verò P E una $\infty\ y - c + \frac{bx}{a}$, ac P E altera $\infty\ y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$: erit O E, O B E, atque utraque P E $\infty\ z$. Et cum D O aut D P seu A M sit $\infty \frac{cx}{a}$, atque D Q seu A N $\infty \frac{cff}{ad}$: erit Q O vel Q P (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, D O vel D P $\pm$ D Q, atque etiam Q D — D O vel D P) æqualis $\frac{cx}{a} \pm \frac{cff}{ad}$, atque etiam $\frac{cff}{ad} - \frac{cx}{a}$. Unde si eadem Q O vel Q P multiplicetur per Parametrum $\infty \frac{ad}{c}$, erit rectangulum $\infty\ dx \pm ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ O E, O B E, aut utriusque P E,
9. hoc est, zz: erit quoque $zz \infty dx \pm ff$, atque $zz \infty ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæsita: positis iisdem, ut supra, per pun-

punctum A ducenda est recta A C ipsi B E parallela, ac deinde ipsa A C, ubique consideranda, ut considerata fuit recta A B in superiori figura. Porrò sumpto in eadem A C puncto utcunque, veluti C, atque per id ductâ rectâ ipsi A B parallelâ, velut O C E, erit similiter hæc O C E ubique consideranda, sicut considerata fuit recta O B E in præcedenti figura, nullâ scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ: Si æ-

I. quatio sit $dy \infty xx$, erit A C diameter, A vertex, & Parame-



ter ∞ d. Cum enim A C seu B E sit concepta ut y, & C E seu A B ut x, rectangulumque sub Parametro & A C contentum, hoc est, dy, æquetur quadrato rectæ C E seu A B, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy \infty xx$.

II. Si æquatio sit $dy . ff \infty xx$, sumptâ A F ∞ $\frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta F C, atque Parametro ∞ d. Est

 enim

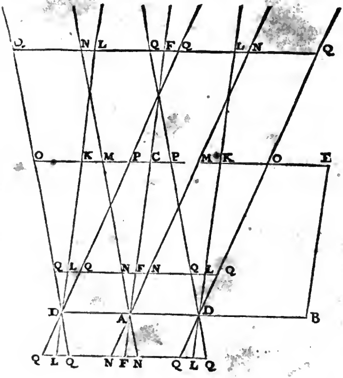
enim pro triplici juxta Regulam distinctione F C $\infty\ y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro ac eadem F C contentum $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ C E, hoc est, xx: erit, ut petitur, $dy . ff \infty\ xx$.

III. Si æquatio sit $dy \infty\ vv$, vel $dy . ff \infty\ vv$, atque v primùm assumpta sit pro $x \pm c$, factâ A D $\infty\ c$, sumptoque puncto D ab A versùs B, si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ D K ipsi A C parallelâ, diameter in recta D K. Et si terminus ff deficiat,
IV. erit vertex in D; sin secus in L, cum triplici variatione, ut supra expositum est. Et patet, D B sive D A B, hoc est, K E sive K C E fore v, D K $\infty\ y$, atque L K $\infty\ y \pm \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictaque D K comprehensum $\infty\ dy$; at verò id quod sub d & L K comprehenditur $\infty\ dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato applicatæ K E sive K C E, hoc est, vv: erit, ut petitur, $dy \infty\ vv$, vel $dy . ff \infty\ vv$.

V. Sit deinde v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a}$, sumptoque in linea O C E puncto M à C versùs E, si habeatur $- \frac{by}{a}$; at ab altera parte lineæ A C, si habeatur $+ \frac{by}{a}$, ita ut A C sit ad C M, sicut a ad b: erit in recta A M diameter, ejusque vertex in
VI. puncto A, si terminus ff deficiat; sin minus, in N. Et positâ ratione A C ad A M, ut a ad e, ac proinde recta A M $\infty\ \frac{ey}{a}$, erit Parameter $\infty\ \frac{ad}{e}$. Est enim recta C M $\infty\ \frac{by}{a}$, ac proinde M E $\infty\ y - \frac{by}{a}$, atque M C E $\infty\ y + \frac{by}{a}$, id est, M E vel M C E $\infty\ v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangulum sub dicta Parametro & recta A M contentum ∞ quadrato ex M E vel M C E, erit, $dy \infty\ vv$.

Porrò cum N A sit $\infty\ \frac{ffe}{da}$, erit N M $\infty\ \frac{ey}{a} \pm \frac{ffe}{da}$, atque etiam

etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro & recta N M contentum ∞ $dy \pm ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem rectangulum cum sit ∞ quadrato ex M E vel M C E, hoc est, vv; erit quoque $dy.ff$ ∞ vv.



Sit denique v assumpta pro $x \pm \frac{by}{a} \pm c$: eritque, sup-
VII. VIII. positis iisdem quæ supra, diameter in D O, vel in D P;
IX. & , si terminus ff deficiat vertex in D; sin minus, in Q. Et positâ ratione D K ad D O, ut & D K ad D P, sicut a ad e, ac proinde rectâ D O, ut & D P ∞ $\frac{ey}{a}$; erit parameter ∞ $\frac{ad}{e}$. Est enim O E ∞ $x - \frac{by}{a} - c$, atque

 OCE

O C E $\propto x + \frac{by}{a} + c$; itemque P E una $\propto x - \frac{by}{a} + c$, ac P E altera $\propto x + \frac{by}{a} - c$, hoc eſt, O E, O C E, & P E una vel altera erit $\propto v$. Eſtque Q O vel Q P (ſicut ſupra N M) $\propto \frac{cy}{a}$ 8 $\frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{cy}{a}$: ac proinde rectangulum ſub Parametro & Q O vel Q P $\propto dy$ 8 ff, atque etiam $ff - dy$. Quare cùm idem rectangulum æquale ſit quadrato ex O E vel O C E, aut ex una alteravè P E, id eſt, vv: erit quoque $dy.ff \propto vv$.

Atque ita demonſtratum eſt generaliter, quod hoc loco propoſitum fuit.

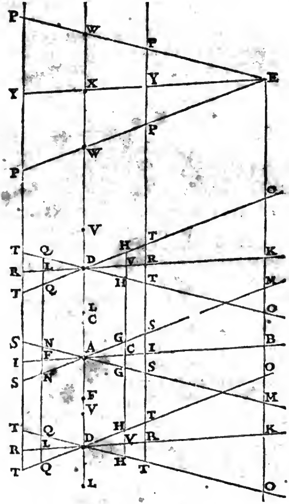
At ſi denique æquatio ſimilis ſit alicui formularum ſub N° 3 comprehenſarum, erit Locus quæſitus, ſi terminus in quo invenitur xx vel vv ſigno + ſit affectus, Hyperbola; ſin idem terminus ſigno — affectus ſit, Ellipſis: excepto tantùm, cùm poſteriori caſu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & ſimul tranſverſa diameter parametro eſt æqualis: quippe eo caſu, ut patet, quæſitus Locus Circulus exiſtit.

Et primo quidem caſu, cùm nempe terminus in quo xx vel vv ſigno + affectus reperitur, ac proinde Locus quæſitus eſt Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte conſtitutus vel ſigno + affectus, vel contra; & ſi ſigno — affectus ſit, atque in æquatione habeatur fractio, ipſa majoris perſpicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utrâque quantitate incognitâ primùm conceptâ, ſequenti formâ ſe exhibebit æquatio: $yy \propto \frac{lxx}{g} + ff$, (id eſt, $yy - ff \propto \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$: eritque, ut in ſequenti figura, caſu primo, nempe ſi terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem conſtituens ſigno + affectus ſit, diameter Hyperbolæ deſcribendæ in recta A X, quæ ducitur per punctum A poſitione datæ B E parallela. Sin contra, hoc eſt, ſi terminus ff ſigno — affectus ſit, uti caſu ſecundo, erit diameter in data poſitione recta A B, quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad

Caſus 1mus, cùm Locus eſt Hyperbola.

eaſdem

eaſdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel aſſumpto angulo A B E æquales: eritque caſu utroque centrum Hyperboles in puncto A, & ſemi-latus tranſverſum ∞ f, quod in



dictis diametris reſpectivè per lineas A C vel A F exprimatur. Porrò ſi l ſit ∞ g, vel, quod idem eſt, ſi termino xx vel yy nulla ad-

hæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g.

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versùs X & versùs B respectivè; supponaturque eandem secare rectam X E, quæ ducta sit ipsi A B æquidistans, ut & ipsam B E, ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E: erit

$$FX \propto y+f, \qquad FB \propto x+f,$$
$$CX \propto y-f, \qquad CB \propto x-f;$$

ideoque rectangulum

$$FXC \propto yy-ff, \;\&\; FBC \propto xx-ff.$$

Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente rectangulum FXC [a] sit $\propto$ quadrato ex X E seu A B, hoc est, xx; itemque rectangulum F B C sit $\propto$ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit $yy-ff \propto xx$, hoc est, $yy \propto xx+ff$ itemque

$$xx-ff \propto yy, \text{ sive } yy \propto xx-ff.$$

[a] per 10 primi hujus.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g; similiterque etiam ratio rectanguli F X C ad quadratum X E, aut rectanguli F B C ad quadratum B E eadem sit [b], quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g: erit ut l ad g, ita $yy-ff$ ad xx; itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad yy, hoc est, reductâ proportione ad æqualitatem, erit $lxx \propto gyy-gff$, ut & $lyy \propto gxx-gff$. unde divisis omnibus per g, fit $\frac{lxx}{g} \propto yy-ff$, hoc est, $yy \propto \frac{lxx}{g}+ff$; & $\frac{lyy}{g} \propto xx-ff$. Quod demonstrandum erat.

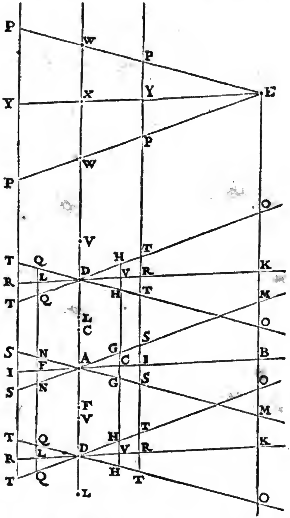
[b] per 10 primi hujus.

Casus 2dus, cùm Locus est Hyperbola.

At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $zz \propto \frac{lxx}{g}+ff$ (id est, $zz-ff \propto \frac{lxx}{g}$), vel $\frac{lzz}{g} \propto xx-ff$: aut z assumpta erit pro $y \pm c$, vel pro $y \pm \frac{bx}{a}$, aut

§. 1. pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$. Et quidem primò si z assumpta sit pro $y \pm c$, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela & $\propto c$; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y-c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E. Sin contra z fuerit assumpta pro $y+c$, idem illud punctum

ctum D reperiatur ab altera parte lineæ A B. Deinde per punctum D ductâ rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E productam, si opùs fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus *ff* signo + affectus sit, in recta D X. sin contra, hoc est, si terminus *ff* signo — affectus sit, in prædicta

 recta

recta DK; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE vel DKE sive DXE æquales. Eritque casu utroque D centrum, & semilatus transversum ∞f, quod in dictis diametris respectivè per lineas DV vel DL exprimatur; eritque porrò transversi lateris ad rectum ratio, ut l ad g. Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diametro, versus X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam XE, ut & ipsam KE, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit DAX sive KBE $\infty y+c$, & DX seu KE $\infty y-c$; ideoque eadem DAX & KBE vel DX & KE ea ipsa, quæ pro z est assumpta: ac propterea LX $\infty z+f$, & LK $\infty x+f$

atque VX $\infty z-f$, & VK $\infty x-f$:

ideoque rectangula

LXV $\infty zz-ff$, & LKV $\infty xx-ff$.

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli LXV ad quadratum XE, ut & utriusque rectanguli LKV ad quadratum ex KE vel KBE respectivè, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit quoque ut

l ad g, ita $zz-ff$ ad xx,

itemque ut l ad g, ita $xx-ff$ ad zz:

hoc est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

erit $\frac{lxx}{g} \infty zz-ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g}+ff$,

& $\frac{lzz}{g} \infty xx-ff$: aut, si l sit ∞g,

erit $zz \infty xx+ff$,

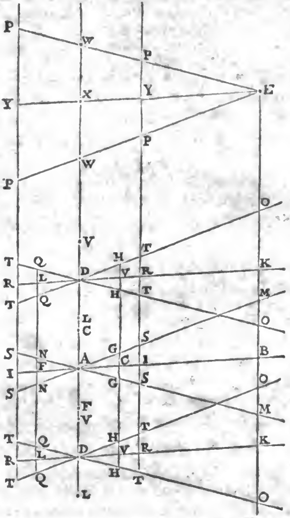
& $zz \infty xx-ff$.

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

§. 2. At verò secundò, si z assumpta sit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE puncto M, ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b; hoc est, ut BM sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB quâ datus vel conceptus angulus ABE sumendum est; sed contra, si habeatur $z \infty y+\frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ AB sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere AM, secantem HCH & QFQ per prædicta puncta C & F ductas ipsi BE parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus *ff* signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipsi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, sunt ipsi A M æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus *ff* signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa

 faciant

faciant angulos angulo AME vel AMBE æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto A. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum ∞f (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg; posito nimirum quòd ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut a ad e; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN. Quæ quidem AG vel AN erit $\infty \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM, sive ut a ad e; ita AC vel AF, hoc est, f, ad AG vel AN; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM, præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E: erit MBE vel AXW $\infty y + \frac{bx}{a}$, & ME vel AW $\infty y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE, uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu WE $\infty \frac{ex}{a}$, ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW, (cùm nempe terminus ff signo + est affectus) FW sive FXW $\infty z + f$,

& CW sive CXW $\infty z - f$:

ideoque rectangulum

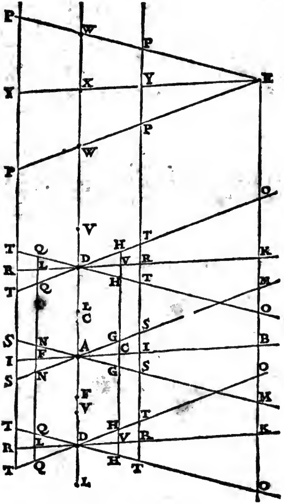
FWC vel FXWC $\infty zz - ff$, & quadratum WE $\infty \frac{eexx}{aa}$.

Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad eeg, ita $zz - ff$ ad $\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, &, omnibus per eeg divisis, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, id est, $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM, cùm nempe terminus ff signo − est affectus, erit NM $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & GM $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum NMG $\infty \frac{eexx}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag, ita prædictum rectangulum NMG

ad

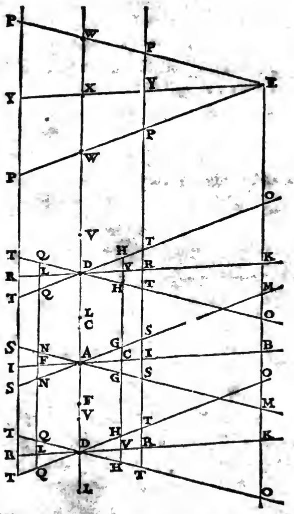
ad M E vel M B E quadratum, hoc eſt, ad zz: erit ut eel ad aag, ita $\frac{eexx-eeff}{aa}$ ad zz: ac proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$.



Hoc eſt, factâ diviſione per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quod hîc demonſtrandum erat.

§. 3. Si denique tertiò z assumpta sit pro y 8 $\frac{bx}{a}$ 8 c, ductâ, ut supra, A D ∞f, & D K ipsi A B parallelâ, sumptoque in linea K E puncto O; ita ut D K ad K O sit, sicut a ad b, hoc est, ut K O sit $\infty \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta D O, secans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (Constat autem ex superiùs explicatis prædictum punctum O, si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus A B E; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta D W. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit ipsa in prædicta recta D O; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo D W E sive D X W E, aut D O E sive D O K E æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D. Et quantùm ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum D W describitur, hoc est, cùm terminus ff signo + afficitur, latus transversum ∞f. idque hîc iterum exprimatur per D V vel D L, ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum D O describitur, nimirum, quando terminus ff signo — affectus est, erit semi-latus transversum recta D Q vel D H, id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag. Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro D W & per punctum H in diametro D O, supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam W E vel O E in puncto E, erit O K B E sive D A X W $\infty y+c+\frac{bx}{a}$, & O E sive D W $\infty y-c-\frac{bx}{a}$, ac O B E sive D A W $\infty y+c-\frac{bx}{a}$, atque O K E vel D X W $\infty y-d+\frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eædem, quæ pro z assumptæ sunt. Est autem D O seu W E $\infty \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum W E $\infty \frac{eexx}{aa}$; ac porrò casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum D W,

DW, cùm nempe terminus ff signo + afficitur, LW sive LXW $\infty\ z+f$, & VW sive VXW $\infty\ z-f$: ideoque rectangulum LWV sive LXWV $\infty\ zz-ff$. Cumque sit ut latus



transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad W E quadratum, hoc est, eo casu, ut aal ad eeg, ita $zz-ff$ ad

eexx

$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \infty eegzz - eegff$, ac, divisis omnibus per eeg, $\frac{lxx}{g} \infty zz - ff$, sive $zz \infty \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum D O, erit Q O $\infty \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & H O $\infty \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum Q O H $\infty \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum Q O H ad quadratum ex O K B E vel O E, sive O B E aut O K E: id est, eo casu, ut eel ad aag, ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad zz: erit quoque proinde $eelzz \infty eegxx - eegff$. Hoc est, divisis omnibus per eeg, erit $\frac{lzz}{g} \infty xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

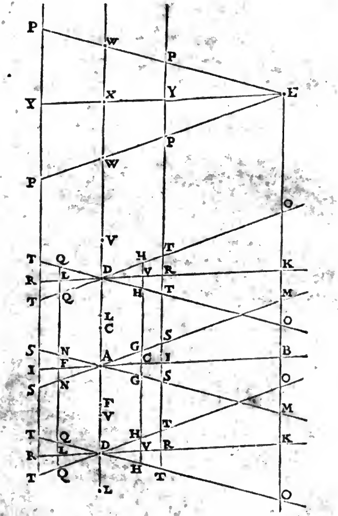
Casus 3tius, cùm Locus est Hyperbola.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \infty \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \infty vv - ff$; atque ipsa v tantùm assumpta sit pro x 8 notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x 8 h; Hoc casu in linea A B vel eadem productâ sumendum est punctum I, ita ut A I sit ∞h (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta B A sumi debet.) Quo facto, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1mo memoratum est, nempe, diameter in recta I Y vel in recta I B, semi-latus transversum ∞f, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus est Hyperbola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $zz \infty \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $zz - ff \infty \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \infty vv - ff$; atque z primùm assumpta sit pro y 8 c, ducenda est utrinque I R parallela B E, & ∞c: quo facto, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta R Y vel

vel R K, ejusque semi-latus transversum ∞f, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mutatis mutandis, casu secundo §. 1. fusiùs explicata sunt.



§. 2. At si z assumpta fuerit pro $y \propto \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in

 quo

quo MA, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel eandem productam, si opus sit, intersecatur, centrum sectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SP vel SM (atque ut ibidem AM seu EW erat $\propto \frac{ex}{a}$, ita hîc SM seu EP erit $\propto \frac{ev}{a}$: cum sit ut AB ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, hoc est, v, ad SM); eritque porrò semi-latus transversum $\propto f$ & $\frac{ef}{a}$ respectivè, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut aal ad eeg, vel ut eel ad aag.

§. 3. Si denique z assumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a} \pm c$, erit punctum T, in quo DO, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, vel productam, si opus sit, intersecatur, centrum; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & supra casu secundo §. 3. fusiùs expositum est. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantùm, quòd, quæ ibidem designabantur per x, hîc sint $x \pm b$, hoc est, v. Ita enim quod ibi erat AB & EX $\propto x$, hîc est IB & EY $\propto v$; quod ibi erat DK & EX $\propto x$, hîc est RK & EY $\propto v$; quod ibi erat AM & EW $\propto \frac{ex}{a}$, hîc est SM & EP $\propto \frac{ev}{a}$; quod ibi erat DO & EW $\propto \frac{ex}{a}$, hîc est TO & EP $\propto \frac{ev}{a}$.

Quamvis autem secundùm Regulam accidere etiam possit, ut v composita sit ex $x \pm$ aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta sit; ita tamen, ut eo casu z solummodo ex $y \pm$ aliâ quantitate in totum cognitâ constare queat, haudquaquam tamen operæ pretium existimamus, casus omnes eò spectantes speciatim persequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in posteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12mi & 13tii superiùs explicata sunt, iidem illi casus per se manifesti sint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, si nimirum, substituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam AB sed per eam, quæ ex A ipsi BE parallela ducta sit, atque y non per BE sed per rectam ipsi AB æquidistantem, designetur. Quòd hîc generaliter monuisse suffecerit.

Alii

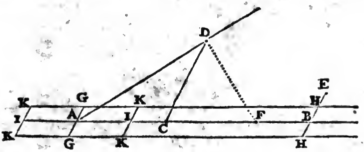
Alii quatuor casus, cùm Locus est Hyperbola.

Iam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

1. $yx \infty ff$,
2. $zx \infty ff$,
3. $yv \infty ff$,
4. $zv \infty ff$,

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta A B sumatur A C ∞f, atque ex puncto C eductâ rectâ C D, quæ ipsi B E sit æquidistans & æqualis priori A C, hoc est ∞f, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta A D, & punctum D vertex, atque A B asymptotos. sive (ductâ rectâ D F ad A D perpendiculari ac in A B terminata) erit A D semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut A D quadratum ad D F



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam B E in puncto E, erit [a] rectangulum A B E ∞ quadrato [a] ex A C vel C D. Quare cum A B sit ∞x, B E ∞y, & A C ∞f: erit $xy \infty ff$. Quod primo casu erat demonstrandum.

[a] per 3 primi hujus.

Secundo casu, cùm nempe æquatio est $zx \infty ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y ♉ notâ quâdam quantitate. Esto

 itaque

itaque assumpta pro y 8 c, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta A G ipsi B E parallela, ac ꝏ c: sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ A B, prout c quantitas signo + vel — fuerit affecta; ductâque porrò G H ipsi A B parallelâ, centro G, Asymptoto G H, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbole describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam B E in puncto E, erit rectangulum G H B E vel G H E ꝏ ff. Unde cum sit G H ꝏ x, & H E vel H B E ꝏ y 8 c, id est, z: erit G H E vel G H B E rectangulum ꝏ zx, ac propterea zx ꝏ ff. Quod 2^do^ casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit yv ꝏ ff: v quoque tantùm pro x 8 notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro x 8 b. Ideoque ad inventionem Loci quæsiti, in recta A B vel in ipsâ productâ sumenda est A I ꝏ b, ac porrò centro I, atque Asymptoto I A B vel I B, cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam B E secare supponatur in E: erit rectangulum I A B E vel I B E ꝏ ff. Quare cum I A B vel I B sit ꝏ x 8 b, hoc est, v, & B E ꝏ y: erit yv ꝏ ff. Quod 3^tio^ casu demonstrandum erat.

Denique quarto casu, si nempe æquatio sit zv ꝏ ff: erit z assumpta pro y 8 c, & v pro x 8 b. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est I K ipsi B E æquidistans & ꝏ c; ductâque K H ipsi A B parallelâ, centro K, atque Asymptoto K G H vel K H, cæterisque, ut casu 1^mo^, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam B E in E: erit rectangulum K G H E vel K H E, ut & K G H B E vel K H B E ꝏ ff. Hinc cum H B E vel H E sit ꝏ y 8 c, id est, z, & K G H vel K H ꝏ x 8 b, hoc est, v: erit zv ꝏ ff. Quod 4^to^ casu demonstrandum erat.

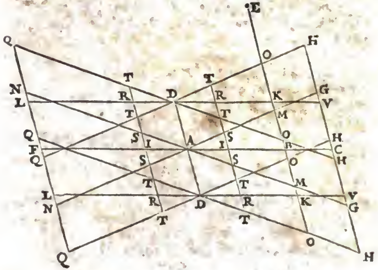
Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, consideranda veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub N^ro^ 3. comprehensarum, cùm nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo — sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz. Quo facto primò, remanente utrâque quantitate

inco-

incognitâ ab initio conceptâ; sequenti formulâ se exhibebit æquatio $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$: eritque, ut in sequenti figura, describendæ Ellipseos diameter in recta A B, quæ pro x indeterminatè est concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E æquales; ac centrum in puncto A, & semi-latus transversum ∞f. id quod in dicta diametro per lineam A C vel A F exprimatur, eritque ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut l ad g. *Casus 1mus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.*

Si enim descripta intelligatur prædicta Ellipsis, transiens per puncta C & F, secansque applicatam B E in puncto E: erit F B $\infty f + x$, & B C $\infty f - x$: ideoque rectangulum F B C $\infty ff - xx$. At cum ex natura Ellipseos, lateribus recto transversoque æqualibus, prædictum rectangulum F B C [a] sit ∞ quadrato ex B E, hoc est, yy: erit quoque proinde eo casu $yy \infty ff - xx$. Et facilè [a] *per 13 primi hujus.*



apparet, si, iisdem positis, B E super rectam F C foret quoque perpendicularis, hoc est, ut angulus quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum sit rectus, prædictam curvam fore Circuli circumferentiam.

Cum autem porrò, lateribus transverso rectoque inæqualibus

per 13 primi hujus. atque in ratione ut l ad g, eadem sit ratio [a] rectanguli F B C ad B E quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: ex prædictis palàm est fore ut l ad g, ita $ff - xx$ ad yy, hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \infty ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

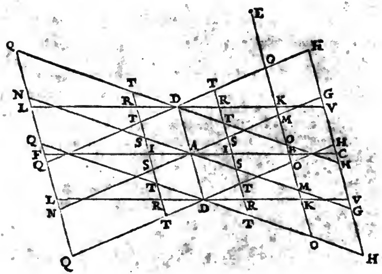
Casus 2ᵘˢ, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$: aut z assumpta erit pro y 8 c, aut pro y 8 $\frac{bx}{a}$, aut pro y 8 c 8 $\frac{bx}{a}$.

§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro y 8 c, ducenda est per punctum A recta A D ipsi B E parallela ac ∞ c, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ A B reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ D K ipsi A B parallelâ, quæ secet rectam B E, productam versùs B, si opùs fuerit, in puncto K, erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta D K, ad quam ordinatim applicatæ eum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo A B E seu D K E æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum ∞ f. quod in dictis diametris per lineas D V & D L exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V, quæ supponatur secare rectam B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E: erit K B E ∞ $y+c$, & K E ∞ $y - c$, ideoque eadem K B E vel K E ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque L K sit ∞ $f+x$, & K V ∞ $f - x$: erit rectangulum L K V ∞ $ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli L K V ad quadratum ex K B E vel K E, hoc est, ad zz, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g: erit ut l ad g, ita $ff - xx$ ad zz, hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \infty ff - xx$. Quod quidem, si l sit ∞ g, idem est ac $zz \infty ff - xx$. Atque hìc iterum facilè apparet, quòd, existente angulo D K B E vel D K E recto, & $l \infty g$, hoc est, rectangulo L K V ∞ K E quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro y 8 $\frac{bx}{a}$, sumpto in linea B E, pro-

productâ versùs B, si opùs fuerit, puncto M; ita ut A B ad B M sit, sicut a ad b, hoc est, ut B M sit $\infty \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si z assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ A B, quâ datus vel conceptus est angulus A B E, sumi debet; sin contra, z pro $y + \frac{bx}{a}$ assumpta fuerit, ab altera ejusdem lineæ A B parte sumendum est) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere N A M G, secantem rectam H C H, atque occurrentem ipsi Q F Q, quæ per prædicta puncta C & F ipsi B E ductæ sunt æquidistantes, in G & N. Quo facto, erit quæsitæ Ellipseos diameter



in recta N G, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, angulo A M E vel A M B E æquales. Porrò centrum ejusdem erit in puncto A, & semi-latus transversum erit recta A N vel A G. (quæ quidem A N vel A G, si ratio A B ad A M supponatur ut a ad e, æquabitur $\frac{ef}{a}$: cum sit ut A B ad A M, sive ut a ad e, ita A C, hoc est, f, ad A G.) Denique ratio transversi lateris ad rectum erit ut eel ad aag, id est, si l sit ∞g,

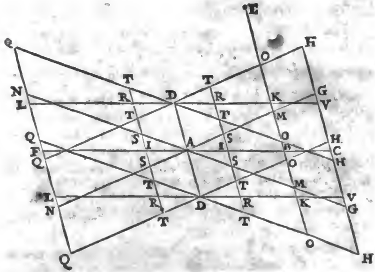
∞g, five, quod idem est, si termino zz nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa, hoc est, ut A M quadratum ad quadratum A B.

Etenim si prædicta Ellipsis descripta intelligatur, transiens per N & G, supponaturque eandem secare rectam M E vel M B E, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E: erit eadem M E $\infty\, y - \frac{bx}{a}$, & M B E $\infty\, y + \frac{bx}{a}$, ac proinde ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque A M sit $\infty\ \frac{ex}{a}$, erit N M $\infty\ \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & M G $\infty\ \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum N M G $\infty\ \frac{eeff}{aa} - \frac{eexx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli N M G ad quadratum ex M B E vel M E, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, eadem quæ eel ad aag; erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz, ac proinde $eelzz$ $\infty\ eegff - eegxx$: id est, factâ divisione per eeg, erit $\frac{lzz}{g}$ $\infty\ ff - xx$. sive, positâ $l \infty g$, $zz \infty ff - xx$. Vnde ex ante dictis iterum apparet, quòd si angulus A M B E vel A M E rectus sit, ac simul $eel \infty aag$, hoc est, rectangulum N M G ∞ quadrato ex M E vel M B E, prædictam curvam fore Circulum, cujus centrum sit A, & semi-diameter A N vel A G.

§. 3. Denique si tertiò z assumpta sit pro $y \; 8 \; c \; 8 \; \frac{bx}{a}$, ductâ, ut supra, A D $\infty\, f$, & D K ipsi A B parallelâ, sumptoque in linea K E puncto O, ita ut D K ad K O sit, sicut a ad b, hoc est, ut K O sit $\infty\ \frac{bx}{a}$: ducenda est per puncta D & O recta Q D O H, secans prædictam H C H in H, atque occurrens præfatæ Q F Q in Q. (constat autem ex iis, quæ jam sæpiùs monita sunt, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ D K, quâ datus vel assumptus est angulus D K E, sumendum esse; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum ab altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, erit describendæ Ellipseos diameter in prædicta recta Q D H, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo D O K E vel D O E æquales. Porrò centrum erit in D, & semi-latus transversum D Q vel D H ∞ A N seu $\frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eef ad aag.

Si enim quæsita Ellipsis descripta intelligatur, transiens per puncta Q & H, eademque secare supponatur rectam O E vel O K E in puncto E: erit O K B E ∞ $y + c + \frac{bx}{a}$, O E ∞



$y - c - \frac{bx}{a}$, O B E ∞ $y + c - \frac{bx}{a}$, & O K E ∞ $y - c + \frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eædem erunt, quæ pro z assumptæ sunt. Cumque porrò sit D O seu A M ∞ $\frac{ex}{a}$, ideoque Q O ∞ $\frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & O H ∞ $\frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: erit rectangulum Q O H ∞ $\frac{eeff - eexx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli Q O H

ad quadratum ex OKBE vel OE, aut ad quadratum ex OBE vel OKE, quæ est transversi lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag: erit quoque ut eel ad aag, ita $\frac{eeff - eexx}{aa}$ ad zz; ac propterea $eelzz \propto eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg, $\frac{lzz}{g} \propto ff - xx$. id est, si l sit $\propto g$, erit $zz \propto ff - xx$.

Atque hîc iterum facilè apparet, si angulus DOKBE, DOE, DOBE, vel DOKE rectus foret, & simul $eel \propto aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus 3tius, cùm Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundùm Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto ff - vv$, atque ipsa v assumpta sit pro $x \pm$ notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro $x \pm h$, eritque eo casu in linea AB vel AF sumendum punctum I; ita ut AI sit $\propto h$. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta IB, ac semi-latus transversum erit $\propto f$, atque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g.

Casus 4tus, cùm Locus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit.

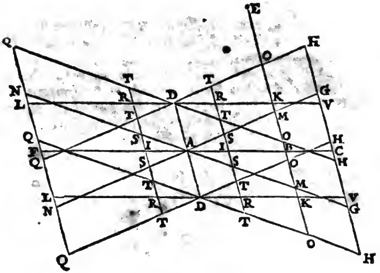
Si denique quantitatum incognitarum primùm conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisque earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$; atque z primò assumpta sit pro $y \pm c$, ducenda est utrinque IR, parallela ipsi BE, ac $\propto c$. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta RK vel RL, eritque ejus semi-

§. 1. latus transversum $\propto f$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia Casu 2do §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro $y \pm \frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi MA,

vel,

vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat AM $\infty \frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum sit ut BA ad AM, hoc est, ut a ad e, ita BI, id est, v, ad SM:) eritque porrò semi-latus trans-



versum $\infty \frac{ef}{a}$, & ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag.

§. 3. Denique si z assumpta fuerit pro $y \pm e \pm \frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opùs fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac supra casu secundo §. 3 fusiùs

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta T O, & semi-latus transversum ∞ $\frac{el}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicitè est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hic cum prioribus conveniant; excepto tantùm, quòd quæ ibidem designabantur per x hîc designentur per x ∽ b, hoc est, v. Ita enim quòd ibi erat A B ∞ x, hîc est I B ∞ v; quod ibi erat D K ∞ x, hîc est R K ∞ v; quod ibi erat A M ∞ $\frac{ex}{a}$, hîc est S M ∞ $\frac{ev}{a}$; & quod ibi erat D O ∞ $\frac{ex}{a}$, hic est T O ∞ $\frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, consideranda veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

FINIS.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,
dum viveret in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

TRACTATUS DE CONCINNANDIS DEMONSTRATIONIBUS GEOMETRICIS ex Calculo Algebraïco.

In lucem editus

à

PETRO à SCHOOTEN,
Francisci Fratre.



AMSTELODAMI,
Ex Typographia BLAVIANA, MDCLXXXIII.
Sumptibus Societatis.

Nobilissimis & Splendissimis Viris, Academiæ Lugdunensis Curatoribus vigilantissimis,

D. AMELIO à BOVCHORST, Wimmenumi Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpotentium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem honoratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandiæ Aggerum Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEP, I.C. Cortenhoevii Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniæ Sueciæque Reges, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Exconsuli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato, Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domino, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britanniæ Daniæque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dordrechtanorum Vrbis, in Concilio Præpotentium Hollandiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORVMQVE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissimæ Reipublicæ Leidensis Consulibus,

D. CORNELIO à BVYTEVEST.

D. GVILHELMO PAETS, I.C. Aggerum Rhenolandiæ Chomarcho, &c.

D. PAVLO à SWANENBVRG, I.C. in Præpotentium Fœderati Belgii Ordinum Consessu Hollandiæ nomine Delegato & Assessori.

D. RIPPARDO à GROENENDYCK, I.C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

D. IOHANNI à WEVELINCHOVEN, I.C. Reip. Leidensis Syndico, & D D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobiliſſimi atque Ampliſſimi Viri, Domini plurimum honorandi,

GEminam aſſequendæ veritatis methodum, quarum altera Syntheſis ſive Compoſitio dicta, altera Analyſis vocata ſive Reſolutio, cumprimis in Matheſi à Veteribus frequentatam tritamque fuiſſe, palam faciunt celebria eorundem monumenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p.m. Frater, poſtquam methodo Synthetica ſcientiæ hujus præclara multa publicis tam ſcriptis quam prælectionibus cum fructu tradidiſſet, ad Analyſin quoque, certiſſimam inveniendi artem, ejuſque perficiendæ rationem ſua ſtudia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperiſſent, Analyſeos beneficio ac ope reperta eſſent: ſed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, diſſimulato hoc artificio & ſuppreſſo, vulgari tantum Syntheſeos forma exhibuiſſent. Sed cum Veterum diſſimulatione factum videret, hunc Analyticæ methodi præſtantem uſum non modo à multis ignorari ac negligi, ſed ipſam ejus certitudinem ac evidentiam à nonnullis ſuſpectam haberi, atque adeo ſoli Syntheſi miſerando labore inhæreretur: conſultum judicavit hac peculiari diatriba oſtendere, ipſum quoque Syntheticum demonſtrandi modum in Analyſi contineri, atque ex ea elici poſſe; ut eo argumento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat, & præferenda ſit. Sed vix huic tractatui ſupremam impoſuerat manum, cum, proh dolor, vita ejus, atque omnis reliqua de eo expectatio, intercedente fato abrupta fuit. At vero, ut poſthumus idem atque noviſſimus induſtriæ ejus fœtus in publicam lucem, cui deſtinatus erat, rite & honeſte prodire poſſet: ego, ut defun-

defuncti frater unicus, mei esse officii atque pietatis existimavi, non tantum in me recipere editionis promovendæ ac juvandæ curam; sed etiam pro veneratione & observantia, quæ vobis, Nobilissimi atque Amplissimi Domini, jure multiplici debetur, eundem fœtum inclytæ dignitati vestræ ac honori consecrare. Utique futurum spero, ut cujus ingenii primitias, illustribus vestris nominibus olim inscriptas, propitia benignitate excepistis, hunc quoque ultimum ejusdem fructum gratiose suscipiatis. Neque solita humanitas vestra obstare sinet meam offerentis tenuitatem, qui simul hoc quantulocunque conatu pro vestris non modo in Fratrem, sed etiam in p. m. Parentem meum, longi temporis beneficiis meritisque gratum animum profiteri ac testari exoptem. Quod quidem pro illis, meque ipso, luculentius aliquando me facturum confido, si & mihi, à prima ætate similibus studiis innutrito, benevolentiæ & favoris vestri auram aspirare contingat. Interim DEUM OPT. MAX. suppliciter oro, ut consilia vestra & pro Reip. salute atque Academiæ decore curas secundet, optimisque successibus donet.

Vestrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

PETRUS à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

LECTORI S.

QVoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentiùs per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi possunt: sufficere judicavi variis diversorum generum exemplis rem apertissimè exponere, candidéque impertiri. Vale.

PROBLEMA.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub A D, D B comprehensum æquetur quadrato rectæ C D. *Vide sequentem figuram.*

Series *Analyseos* sive *Resolutionis.*

Supposito Problemate ut jam facto,

voco A C. a

C B. b

& B D vel D E. x: eritque A D. $a+b+x$, & C D. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico A D. $a+b+x$

per B D vel D E. x

Eritque rectangulum sub A D, D B comprehensum, hoc est, ▭ A D E F. $ax+bx+xx$.

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + bx + xx \\ bb + bx \\ \hline \end{array}$$

Et fit quadratum ex CD, hoc est, □ CDGH. $bb + 2bx + xx.$

Vnde talis emergit æquatio

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx,

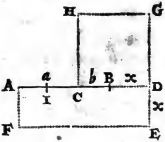
eritque $ax \propto bb + bx$. †

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,

& fit $ax - bx \propto bb$.

Cujus utraque pars si dividatur per $a - b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b, ita b ad x.



Id quod docet, ad producendam AB usque ad D, quasis requiritur, sumendam esse CI æqualem CB, ita ut AI sit $\propto a - b$; ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc est, ad $a - b$ & b, esse inveniendam 3[tiam] proportionalem BD.

Vnde tale formari poterit Theorema, supponendo rectangulum ADB quadrato ex CD æquale esse.

Si AB producatur ad D, ita ut rectangulum ADB sit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & excessus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonstratio eodem ordine procedit quo Analysis, sequendo nimirum ejusdem vestigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypothesi ▭ A D.B sit æquale □^{to} ex C D,

$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx$

ablato utrinque ▭^{lo} sub C D & D B,

$bx + xx$

erit [a] ▭ sub A C & D B æquale ▭^{lo} sub C D & C B [b]. a per 1 secundi.

$ax \propto bb + bx.$ b per 2 secundi.

Rursus auferatur utrinque ▭ sub I C vel C B & B D, id est, bx,

eritque [c] ▭ sub A I & B D æquale □^{to} ex C B [d]. c per 1 secundi.

$ax - bx \propto bb.$

Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit [e] d per 3 secundi.

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D. e per 17

$a - b —— b —— b \,/\, x.$ Quod erat propositum. sexti.

Quoniam autem præstare videtur, loco horum æqualium rectangulorum considerare laterum proportionem, quandoquidem in demonstrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportiones schematum contemplationi insuper sunt astringendæ, linearum hæc inter se collatio simplicior est censenda quàm planorum aut solidorum, ipsaque etiam figuras requirit minùs intricatas, vel saltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eousque continuanda varièque transmutanda, utendo sc. ad id modis argumentandi libro 5to Elementorum expositis, donec appareat quæsitum ex tribus prioribus proportionis terminis constare seu inveniri posse. Quod ipsum ut rectiùs percipiatur, visum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonstrationem hîc afferre, qualis illa à principio usque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amussim respondet.

Etenim cum ex hypothesi sit

▭ A D B æquale □^{to} ex C D:

$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx$:

f per 17 sexti. Erit [f], resolvendo æqualitatem in proportionem,

ut A D ad C D, ita C D ad B D.

$a+b+x$ —— $b+x$ —— $b+x$ / x.

Hinc cum sit

ut totum A D ad totum C D,

$a+b+x$ —— $b+x$

ita ablatum C D ad ablatum B D:

$b+x$ —— x

g per 19 quinti. erit etiam [g]

reliquum A C ad reliquum C B, ut ablatum C D ad ablatum BD.

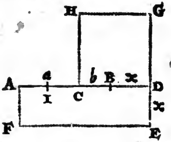
a —— b —— $b+x$ / x.

h per 17 quinti. Et dividendo [h]

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D

$a-b$ —— b —— b / x. ut proponebatur.

Hinc, ut Problemati huic sit locus, patet, rectam A C ipsâ C B debere esse majorem; atque adeò hanc conditionem Problemati esse præfigendam, cum sine eâ constare nequeat, si velimus ut quæsitum ex datis inveniatur, utpote ad quod obtinendum B C ex C A est subtrahenda.



Idem etiam liquet, supponendo A C æqualem aut minorem quàm C B. Nam A C æquali existente ipsi C B, non posset rectangulum A D B quadrato ex C D æquale esse: cum illud [i] unà cum quadrato ex C B ei tantum æquale existat. Et quidem si A C ipsâ C B minor sit, manifestum est, rectangulum A D B quadrato ex C D tunc adhuc multò minus fore.

i per 6 secundi.

Cum igitur constet Determinatio, Problema construetur hoc modo:

Constructio.

Assumptâ C I æquali C B, si fiat ut reliqua A I ad I C vel C B, ita C B ad B D: dico rectangulum A D E F,

quod

quod sub A D & D B seu D E comprehenditur, æquale esse quadrato C D G H, à recta C D descripto.

Quod ipsum retrogrado ordine fit manifestum, incipiendo ab Analyseos fine & per ejusdem vestigia redeundo ad illius principium.

Finis *Compositionis*.

habebitur [k]

▭ sub A D & D B seu ADEF æquale □^to ex C D seu CDGH [l].

$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$

Quod erat faciendum.

Rursus addito utrinque ▭^lo sub C D & D B, id est, $bx + xx$,

fiet [m] ▭ sub A C & D B æquale ▭^lo sub C D & C B [n].

$ax \quad \infty \quad bb + bx.$

Deinde addito utrinque ▭^lo sub I C vel C B & B D, id est, bx, ut in alteram transeat partem,

erit [o] ▭ sub A I & BD æquale □^to ex C B.

$ax - bx \quad \infty \quad bb.$

revocatâ proportione ad æqualitatem,

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$a - b \text{——} b \text{———} b. / x$

Etenim cum ex Constructione sit

Principium *Compositionis*.

Alia ejusdem Problematis Compositio, per vestigia proportionalium secundæ Resolutionis regrediens.

Finis *Compositionis*.

erit [p] ▭ sub AD & BD seu ADEF æquale □^to ex CD seu CDGH.

$ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$

Quod erat faciendum.

id est, revocatâ proportione ad æqualitatem,

NOTA Hujus atque sequentium Problematum Compositiones retro legendas esse.

k per 1 secundi.
l per 2 secundi.
m per 1 secundi.
n per 3 secundi.
o per 17 sexti.
p per 17 sexti.

 erit

q per 12 quinti. erit etiam q

ut A D summa antec. ad C D summã conf., ita C D una antec. ad B D unam conseq.

$a+b+x$ ——— $b+x$ ——— $b+x$ ——— x

ita C D anteced. ad B D consequentem:

$b+x$ ——— x

Hinc cum sit ut A C antec. ad C B conseq.,

a ——— b

ut A C ad C B, ita C D ad B D.

a —— b —— $b+x$ / x.

r per 18 quinti. erit componendo r

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$a-b$ —— b ——— b / x

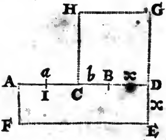
Cum enim ex constructione sit

Principium *Compositionis*

His igitur ita se habentibus, si velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Constructio Problematis, tum ejus demonstratio fuit inventa, tantummodo constet, allatâ Constructione quæsitum semper obtineri: poterimus, calculi vestigiis nunc prætermissis, hujusmodi ad id afferre demonstrationem.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione A I sit ad I C vel C B, sicut C B ad B D: erit s rectangulum sub extremis A I & B D æquale quadrato mediæ C B. Quibus si addatur commune rectangulum sub I C vel C B & B D, erit & t rectangulum sub A C & B D u æquale rectangulo sub C D & C B. His igitur si rursus addatur commune rectangulum sub C D & D B, erit similiter x rectangulum sub A D & D B seu A D E F y æquale quadrato ex C D. Quod erat faciendum.



s per 17 sexti.
t per 1 secundi.
u per 3 secundi.
x per 1 secundi.
y per 2 secundi.

Vel

Vel etiam ſic:

Cum ex conſtructione A I ſit ad I C vel GB, ſicut CB ad BD: erit componendo [a] AC ad CB, ſicut CD ad BD. Sed ut una antecedentium CD ad unam conſequentium BD, ita ſunt [b] antecedentes AC & CD ſimul, id eſt, tota AD, ad conſequentes CB & BD ſimul, id eſt, ad totam CD. Æqualia igitur ſunt [c] quadratum CD & rectangulum ADB. Quod erat faciendum.

a per 18 quinti.
b per 12 quinti.
c per 17 ſexti.

Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto Algebræ munus eſt eam deinde juxta certas regulas tranſmutare, ſervando ſemper æqualitatem, ſic ut tandem conſtet, quo pacto illius ope quæſita quantitas ex datis inveniri poſſit: non inconveniens duxi, ſi unà hic oſtenderem, quibus modis aliquot illius uſitatiores tranſmutationes in proportiones reſolvi queant, cum hæ, ut ſupra monitum fuit, in Problematîs Geometricè reſolvendis ac in Theorematîs ſolito more demonſtrandis, concinniores ſint judicandæ; præſertim ubi eadem æqualitas ad tres pluresve dimenſiones aſcendit, atque idcirco illa cuique minùs obvia eſt, quâ ratione per Geometriæ Elementa ſit explicanda.

Typus aliquot æquationum, ſecundùm Algebræ leges reductarum, & earundem in proportiones correſpondentes reſolutio; tam ad Problematum Reſolutiones Geometricas ex calculo eliciendas, quàm ad Theorematum Demonſtrationes ex eodem componendas, utilis.

Reductiones Algebraïcæ	*Reſolutiones Geometricæ.*	
Si fuerit $ax \infty bc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bc}{a}$.	erit [d] ut a ad b, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita b ad x.	d per 16 ſexti.
Si ſit $ax \; 8 \; bx \infty cd$: dividatur utrinque per $a \; 8 \; b$ fit $x \infty \frac{cd}{a \; 8 \; b}$.	erit [e] ut $a \; 8 \; b$ ad c, ita d ad x. vel permutatim ut $a \; 8 \; b$ ad d, ita c ad x.	e per 16 ſexti.

Si

f per 16 sexti.

Si sit $ax \infty bc\, 8\, dc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bc\, 8\, dc}{a}$.

erit [f] ut a ad $b\, 8\, d$, ita c ad x. vel permutatim ut a ad c, ita $b\, 8\, d$ ad x.

g per 16 sexti.

Si sit $ax\, 8\, bx \infty cd\, 8\, ed$: dividatur utrinque per $a\, 8\, b$ fit $x \infty \frac{cd\, 8\, ed}{a\, 8\, b}$.

erit [g] ut $a\, 8\, b$ ad $c\, 8\, e$, ita d ad x. vel permutatim ut $a\, 8\, b$ ad d, ita $c\, 8\, e$ ad x.

h per 16 sexti.

Si sit $ax \infty bb - cc$: dividatur utrinque per a fit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$.

erit [h] ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x. vel permutatim ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x.

i per 16 sexti. * Vt supra ad notam † k per 17 quinti.

Si sit $ax \infty bb + bx$: * auferatur utrinque bx eritque $ax - bx \infty bb$. dividatur utrinque per $a - b$ fit $x \infty \frac{bb}{a-b}$.

erit [i] ut a ad b, ita $b + x$ ad x. & dividendo [k] ut $a - b$ ad b, ita b ad x.

l per 16 sexti. m per 18 quinti.

Si sit $ax \infty bb - bx$: addatur utrinque bx: eritque $ax + bx \infty bb$. dividatur utrinque per $a + b$ fit $x \infty \frac{bb}{a+b}$.

erit [l] ut a ad b, ita $b - x$ ad x. & componendo [m] ut $a + b$ ad b, ita b ad x.

n per 16 sexti. o per 17 quinti. p vide Clavium ad 18 quinti.

Si sit $ax - ac \infty bx$: addito utrinque ac erit $ax \infty bx + ac$. auferatur utrinque bx eritque $ax - bx \infty ac$. dividatur utrinque per $a - b$ fit $x \infty \frac{ac}{a-b}$.

erit [n] ut a ad b, ita x ad $x - c$. & dividendo [o] ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$. & per compositionem rationis contrariam [p] ut $a - b$ ad a, ita c ad x.

q per 16 sexti. r per 17 quinti.

Si sit $ax - ac \infty bx + bc$: addito utrinque ac erit $ax \infty bx + bc + ac$. auferatur utrinque bx eritque $ax - bx \infty bc + ac$.

erit [q] ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$. & dividendo [r] ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$. Vbi liquet, etiamsi 4[tus] hîc terminus proportionalis quantitatem

dividatur utrinque per $a-b$

fit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$.

tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulteriùs sic argumentari.

α Haud secus, cum sit

ut a ad b, ita $x+c$ ad $x-c$,

erit invertendo [a]

ut b ad a, ita $x-c$ ad $x+c$.

& per compositionem rationis contrariam [b]

ut b ad $b+a$, ita $x-c$ ad $2x$.

Hinc cum $a-b$ —— b....... $b+a$ sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c$ —— $x-c$....... $2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [c] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

$a-b$ ad $b+a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x. [d]

Si sit $ac+ax \infty bc-bx$:

addito utrinque bx

erit $ac+ax+bx \infty bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax+bx \infty bc-ac$.

dividatur utrinque per $a+b$

fit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$.

erit [e] ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$. α

& componendo [f]

ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.

Rursus cum sit

α ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$,

erit invertendo [g]

ut b ad a, ita $c+x$ ad $c-x$.

& per conversionem rationis [h]

ut b ad $b-a$, ita $c+x$ ad $2x$.

a per Coroll. 4 quinti.

b vide Clavium ad 18 quinti.

c per 22 quinti.

d per 15 quinti.

e per 16 sexti.

f per 18 quinti.

g per Coroll. 4 quinti.

h per Coroll. 19 quinti.

Hinc cum $a+b$ —— b.... b—
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $c+x$.... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata:
i per 22 quinti.
erunt ipsæ quoque[i] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,
k per 15 quinti.
$a+b$ ad $b-a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[k]

l per 16 sexti.
m per 17 quinti.
n per Cor. 4 quinti.

Si sit $ax + ac \infty bx - bc$:
addito utrinque bc
erit $ax + ac + bc \infty bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac + bc \infty bx - ax$.
dividatur utrinque per $b-a$
fit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$.

erit[l] ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$. α
& dividendo[m]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
Rursus cum sit
α ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$,
erit invertendo[n]
ut a ad b, ita $x-c$ ad $x+c$.
& per compositionem rationis contrariam[o]
o vide Clavium ad 18 quinti.
ut a ad $a+b$, ita $x-c$ ad $2x$.
Hinc cum $b-a$ —— a...... $a+b$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x-c$...... $2x$,
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata:
p per 22 quinti.
erunt ipsæ quoque[p] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,
q per 15 quinti.
$b-a$ ad $a+b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[q]

r per 16 sexti.
s per 18 quinti.
t per Cor. 4 quinti.
u per Cor. 19 quinti.

Si sit $ac - ax \infty bx + bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty bx + ax + bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac - bc \infty bx + ax$.
dividatur utrinque per $b+a$
fit $\frac{ac-bc}{b+a} \infty x$

erit[r] ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$. α
& componendo[s]
ut $b+a$ ad a, ita $2c$ ad $x+c$.
Rursus cum sit
α ut b ad a, ita $c-x$ ad $x+c$,
erit invertendo[t]
ut a ad b, ita $x+c$ ad $c-x$.
& per conversionem rationis[u]
ut a ad $a-b$, ita $x+c$ ad $2x$.
Hinc

Hinc cum $b+a$ —— a ..... $a-b$
sint 3 magnitudines ab una parte,
& $2c$ —— $x+c$ ..... $2x$
tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque [a] ex æqualitate in eadem ratione, hoc est, (a per 22 quinti.)

$b+a$ ad $a-b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x.[b] (b per 15 quinti.)

Si sit $ax - ac \infty bc - bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \infty bc + ac - bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax + bx \infty bc + ac$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $x \infty c$.

erit [c] ut a ad b, ita $c-x$ ad $x-c$. Unde concluditur c esse ∞ x. (c per 16 sexti.) Nam minor esse non potest, quoniam componendo [d] foret, ut $a+b$ ad b, ita o ad $x-c$. quod est absurdum. (d per 18 quinti.) Similiter major esse nequit, quandoquidem per compositionem rationis contrariam [e] foret ut a ad $a+b$, ita $c-x$ ad o. quod perinde absurdum est. (e vide Clavium ad 18 quinti.) Nec aliter se res habet in sequenti formula.

Si sit $ac - ax \infty bx - bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \infty ax + bx - bc$.
addatur utrinque bc
eritque $ac + bc \infty ax + bx$.
dividatur utrinque per $a+b$
fit $c \infty x$.

erit [f] ut a ad b, ita $x-c$ ad $c-x$. (f per 16 sexti.) Unde rursus ut ante concluditur c esse ∞ x: cum nec major nec minor esse possit.

Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit, ut id quod in eo quæritur ex datis inveniat: ritè me facturum judicavi, si ulteriùs hîc ostenderem, quâ ratione præcedentium reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi liceat, ad æquationes propositas, quas ipsius Problematis conditiones adimplere suppono, Geometricè componendas.

Typus vestigiorum, juxta quæ æquationes superiùs reductæ ac resolutæ rursus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem vestigia regrediendo; ad Compositiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

Compositiones Algebraïcæ	*Compositiones Geometricæ*
a per 16 sexti. fit $ax \infty bc$.	erit [a] $ax \infty bc$.
multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fuerit $x \infty \frac{bc}{a}$: h.e., si sit ut a ad b, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita b ad x:

b per 16 sexti. fit $ax \pm bx \infty cd$.	erit [b] $ax \pm bx \infty cd$.
multiplicetur utrinque per $a \pm b$	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd}{a \pm b}$: h.e., si sit ut $a \pm b$, ad c, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita c ad x:

c per 16 sexti. fit $ax \infty bc \pm dc$.	erit [c] $ax \infty bc \pm dc$.
multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bc \pm dc}{a}$: h.e., si sit ut a ad $b \pm d$, ita c ad x; vel permutatim a ad c, ita $b \pm d$ ad x:

d per 16 sexti. fit $ax \pm bx \infty cd \pm ed$.	erit [d] $ax \pm bx \infty cd \pm ed$.
multiplicetur per $a \pm b$	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{cd \pm ed}{a \pm b}$: h.e., si sit ut $a \pm b$ ad $c \pm e$, ita d ad x; vel permutatim $a \pm b$ ad d, ita $c \pm e$ ad x:

e per 16 sexti. fit $ax \infty bb - cc$.	erit [e] $ax \infty bb - cc$.
multiplicetur utrinque per a	facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \infty \frac{bb - cc}{a}$: h.e., si sit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + x$ ad x:

fit

fit $ax \infty bb + bx$.	erit [f] $ax \infty bb + bx$.	f per 16
addatur utrinque bx	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem	sexti.
eritque $ax - bx \infty bb$.	ut a ad b, ita $b + x$ ad x.	
multiplicetur utrinque per $a - b$	erit componendo [g]	g per 18 quinti.
Si sit $x \infty \frac{bb}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad b, ita b ad x: ‡		Vt supra ad notam ‡
fit $ax \infty bb - bx$.	erit [h] $ax \infty bb - bx$.	h per 16
auferatur utrinque bx	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem	sexti.
eritque $ax + bx \infty bb$.	ut a ad b, ita $b - x$ ad x.	
multiplicetur utrinque per $a + b$	erit dividendo [i]	i per 17 quinti.
Si sit $x \infty \frac{bb}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad b, ita b ad x:		
fit $ax - ac \infty bx$.	erit [k] $ax - ac \infty bx$.	k per 16
auferatur utrinque ac	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem	sexti.
eritque $ax \infty bx + ac$.	ut a ad b, ita x ad $x - c$.	
addatur utrinque bx	& componendo [l]	l per 18
erit $ax - bx \infty ac$.	ut $a - b$ ad b, ita c ad $x - c$.	quinti.
multiplicato utrinque per $a - b$	erit per divisionem rationis contrariam [m]	m vide Clavium ad 17 quinti.
Si sit $x \infty \frac{ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad a, ita c ad x:		
	erit [n] $ax - ac \infty bx + bc$.	n per 16
	id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,	sexti.
	ut a ad b, ita $x + c$ ad $x - c$	
	& componendo [o]	o per 18
	ut $a - b$ ad b, ita $2c$ ad $x - c$.	quinti.
fit $ax - ac \infty bx + bc$.	vel, sumptis consequentium semissibus, [p]	p vide Clavium ad 22
auferatur utrinque ac.		
eritque $ax \infty bx + bc + ac$.	ut $a - b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.	quinti.
addatur utrinque bx	id est, per divisionem rationis contrariam, [q]	q vide Clavium ad 17
erit $ax - bx \infty bc + ac$.		quinti.

 mul-

r per 15 quinti.

multiplicato utrinque per $a-b$ ut $a-b$ ad $b+a$, ita $2c$ ad $2x$. erit etiam [r]

Si sit $x \infty \frac{bc+ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a-b$ ad $b+a$, ita c ad x:

s per 16 sexti.
t per 17 quinti.
u vide Clavium ad 22 quinti.
x vide Clavium ad 18 quinti.
y per 15 quinti.

sit $ac+ax \infty bc-bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ac+ax+bx \infty bc$.
addatur utrinque ac
erit $ax+bx \infty bc-ac$.
multiplicato utrinque per $a+b$

erit [s] $ac+ax \infty bc-bx$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut a ad b, ita $c-x$ ad $c+x$.
& dividendo [t]
ut $a+b$ ad b, ita $2c$ ad $c+x$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [u]
ut $a+b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c+2x$.
id est, per compositionem rationis contrariam, [x]
ut $a+b$ ad $b-a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [y]

Si sit $x \infty \frac{bc-ac}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a+b$ ad $b-a$, ita c ad x:

z per 16 sexti.
a per 18 quinti.
b vide Clavium ad 22 quinti.
c vide Clavium ad 17 quinti.
d per 15 quinti.

sit $ax+ac \infty bx-bc$.
auferatur utrinque bc.
eritque $ax+ac+bc \infty bx$.
addatur utrinque ax
erit $ac+bc \infty bx-ax$.
multiplicato utrinque per $b-a$

erit [z] $ax+ac \infty bx-bc$.
id est, reducendo proportionem ad æqualitatem,
ut b ad a, ita $x+c$ ad $x-c$.
& componendo [a]
ut $b-a$ ad a, ita $2c$ ad $x-c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [b]
ut $b-a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x-2c$.
id est, per divisionem rationis contrariam, [c]
ut $b-a$ ad $a+b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [d]

Si sit $\frac{ac+bc}{b-a} \infty x$: hoc est, si sit ut $b-a$ ad $a+b$, ita c ad x:

sit

erit [e] $ac - ax \infty bx + bc$.
id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem
ut b ad a, ita $c - x$ ad $x + c$.
& dividendo [f]
ut $b + a$ ad a, ita $2c$ ad $x + c$.
vel, sumptis consequentium semissibus, [g]
ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c$.
id est, per compositionem rationis contrariam, [h]
ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam [i]

fit $ac - ax \infty bx + bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty bx + ax + bc$.
addatur utrinque bc
erit $ac - bc \infty bx + ax$.
multiplicato utrinque per $b + a$

Si sit $\frac{ac - bc}{b + a} \infty x$: hoc est, si sit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x:

[e] per 16 sexti.
[f] per 17 quinti.
[g] vide Clavium ad 22 quinti.
[h] vide Clavium ad 18 quinti.
[i] per 15 quinti.

fit $ax - ac \infty bc - bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \infty bc + ac - bx$.
auferatur utrinque bx
erit $ax + bx \infty bc + ac$.
multiplicato utrinque per $a + b$
Si sit $x \infty c$: seu, quod idem est, si x sit ad c, sicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $ac - ax \infty bx - bc$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac \infty ax + bx - bc$.
auferatur utrinque bc
erit $ac + bc \infty ax + bx$.
multiplicato utrinque per $a + b$
Si sit $c \infty x$: seu, quod idem est, si c sit ad x, sicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perveniatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqualia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo, omnino ut in Compositionibus hisce Algebraicis factum est.

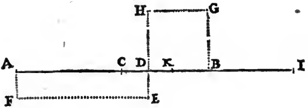
PRO-

Problema.

Datam rectam A B, utcunque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub A D, D C comprehensum sit æquale quadrato ex D B.

Series *Analyseos* sive *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam facto,
voco A C. a
C B. b
& C D. x; eritque A D $\infty\ a+x$, & D B $\infty\ b-x$.



Deinde ut habeatur æquatio,
Multiplico A D. $a+x$
per D C seu D E. x
Et fit rectangulum A D E F. $ax+xx$.
Similiter multiplico D B. $b-x$
per D B seu B G. $b-x$
$-bx+xx$
$bb-bx$
Et fit quadratum D B G H. $bb-2bx+xx$.
Vnde talis exurgit æquatio
$ax+xx\ \infty\ bb-2bx+xx$.
Ad quam reducendam tollatur utrinque xx,
eritque $ax\ \infty\ bb-2bx$.

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte, & fit $ax+2bx\ \infty\ bb$.

Cujus

Cujus utraque pars si dividatur per $a + 2b$,

invenietur $x \infty \frac{bb}{a + 2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Id quod docet, ad secandam A B in D, qualis requiritur, producendam esse A B ad I, ita ut B I sit æqualis B C; ac deinde ad A I & I B vel B C inveniendam esse 3^tiam proportionalem, hoc est, ut A I sit ad I B vel B C, sicut B C ad C D.

Vt autem pateat demonstratio, repetantur Analyseos vestigia. Si enim per hæc ipsa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & desinendo ubi illa initium sumpsit, inventa simul erit via à dato seu concesso perveniendi ad quæsitum. In quem igitur finem binas sequentes compositiones, quarum altera Algebræ, altera Geometriæ genuina est, ob oculos pônere visum fuit, adhibitâ utriusque calculi interpretatione sive ad figuram relatione.

Compositio Algebraïca. *Compositio Geometrica.*

Finis *Compositionis*.

Compositio Algebraïca.

▭ A D, C D vel A D E F

& fit[a] $ax + xx \infty$

□ D B vel D B G H.

[b] $bb - 2bx + xx$.

□ C D vel D K

Addatur utrinque xx,

▭ A C, C D

eritque[c] $ax \infty$

(□DB — □ C D vel D K) i.e.[d],

[d] ▭CBK

$bb - 2bx$.

▭CI, CD vel[e] ▭CDI + □CD

Auferatur utrinque $2bx$,

▭AI, CD □ I B vel B C

erit[f] $ax + 2bx \infty bb$.

Compositio Geometrica.

▭ A D, C D vel A D E F

Et fit, *per 3. 2^di.* $ax + xx \infty$

□ D B vel D B G H.

$bb - 2bx + xx$. *per 6. 2^di.*

□ C D vel D K

Addatur utrinque xx

▭ A C D ▭ C B K

erit, *per 16. 6^ti.* $ax \infty bb - 2bx$.

Id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

A C C B B K K D vel C D

ut a ad b, ita $b - 2x$ ad x.

Et, sumptis consequentium semissibus, *vide Clavium ad 12 5^ti.*

A C C I B K K C

ut a ad $2b$, ita $b - 2x$ ad $2x$.

Vnde dividendo erit, *per 17 quinti.*

A I I C B C 2 C D vel C K

ut $a + 2b$ ad $2b$, ita b ad $2x$.

id

a *per 3 secundi.*
b *per 6 secundi.*
c *per 5 secundi.*
d *per 1 secundi.*
e *per 3 secundi.*
f *per 17 sexti.*

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, sive, sumptis consequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5ti.*

AI IB BC CD

Ex constructione est, ut $a + 2b$ ad b, ita b ad x.

Principium *Compositionis.*

Adapertâ itaque tum ad Constructionem tum ad Demonstrationem viâ, licebit Problema construere atque dupliciter demonstrare, ut sequitur.

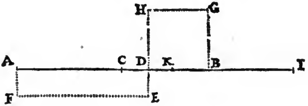
Constructio.

Productâ A B ad I, donec B I sit æqualis B C. fiat ut A I ad I B vel B C, ita B C ad C D: dico rectangulum A D C seu A D E F quadrato D B seu D B G H æquale esse.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione A I sit ad I B vel B C, ut B C ad C D: erit [g] rectangulum sub extremis A I, C D, id est, [h] rectangulum sub A C, C D unà cum rectangulo sub C I, C D, æquale quadrato mediæ I B vel B C. A quibus si commune aufe-

g per 17 sexti.
h per 1 secundi.



ratur rectangulum sub C I, C D: erit reliquum rectangulum sub A C, C D æquale B C quadrato, dempto eidem rectangulo sub C I, C D, id est, [i] rectangulo C D I unà cum quadrato C D. At cum dempto C D I rectangulo à quadrato C B vel B I [k] relinquatur quadratum D B: patet dictum rectangulum A C D quadrato D B æquale esse minus quadrato C D. Hinc cum, sumendo

i per 3 secundi.
k per 5 secundi.

mendo C D & D K æquales, quadratum D B minus quadrato C D vel D K [l] æquale sit rectangulo C B K: manifestum est, si æqualibus hisce rectangulis A C D & C B K addatur commune quadratum C D vel D K, etiam totum toti æquale esse, id est, [m] rectangulum A D C seu A D E F ipsi D B quadrato seu D B G H. Quod erat faciendum.

l per 6 secundi.
m per 3 secundi.

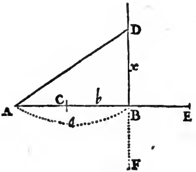
Vel sic:

Cum ex constructione sit ut A I ad I B, ita B C ad C D: erit quoque, sumptis consequentium duplis, [n] ut A I ad I C, ita B C ad 2 C D seu C K; & dividendo [o] ut A C ad C I, ita B K ad K C; id est, sumptis consequentium semissibus. [p] ut A C ad C B, ita B K ad K D vel C D. Æquale igitur est [q] rectangulum sub extremis A C, C D rectangulo sub mediis C B, B K. Quibus si addatur commune quadratum C D vel D K, erit & totum toti æquale, id est, [r] rectangulum A D C seu A D E F ipsi quadrato D B seu D B G H [s]. Quod erat faciendum.

n vide Clavium ad 22 quinti.
o per 17 quinti.
p vide Clavium ad 22 quinti.
q per 16 sexti.
r per 3 secundi.
s per 6 secundi.

PROBLEMA.

Datâ rectâ A B utcunque sectâ in C, erectâque ex ejus termino B super ipsa perpendiculari indefinitâ B D: ex altero ejus termino A rectam lineam ducere A D, huic occurrentem in D; ita ut ipsa æqualis sit rectis D B, B C simul sumptis.



Series *Analyseos.*

Ponatur factum quod quæritur,

sitque A B ∞ *a*

C B ∞ *b*

& B D ∞ *x*: eritque

A D ∞ *b* + *x*.

Hinc cum angulus ad B sit rectus, erit [a] quadratum ex A D æquale binis quadratis ex A B & B D.

a per 47 primi.

 Vnde

Vnde talis resultat æquatio

□AD □AB+□BD

$bb + 2bx + xx \infty aa + xx.$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx,

critque $bb + 2bx \infty aa.$

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

& fit $2bx \infty aa - bb.$

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \infty \frac{aa - bb}{2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a + b$, ita $a - b$ ad x.

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opùs tantùm esse, ad CE, AE, & AC invenire 4^tam proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analysi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analysis & Synthesis directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis *Compositionis.*

Vnde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt □FD & □AD.

b per 47 primi. □FB+2▭FBD+□BD, vel □FD [b]. □AB+□BD, vel □AD [c].

c per 4 secundi. Et fit $bb + 2bx + xx \infty aa + xx.$

□BD

Rursus addatur utrinque xx,

d per 6 secundi. □FB+2▭FBD □AB [d].

critque $bb + 2bx \infty aa.$

□FB vel BC

Addatur utrinque bb,

▭CE, BD seu 2▭FBD ▭EAC.

e per 16. sexti. erit [e] $2bx \infty aa - bb$

id est,

id est, reductâ proportione ad æqualitatem, sumptâque FB æquali BC,

CE AE AC BD

Ex constructione est ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x.

Principium *Compositionis*.

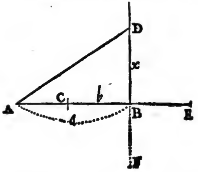
Inventâ igitur tum Constructione tum Compositione sive Demonstratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit investigata, in hunc modum construi atque componi.

Constructio.

Productâ AB ad E, ut BE sit æqualis BC: fiat ut CE ad AE, ita AC ad BD, jungaturque AD. Dico hanc ipsis DB, BC simul sumptis æqualem esse.

Demonstratio.

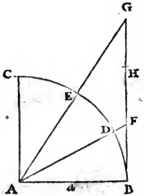
Etenim productâ DB ad F, ita ut BF sit æqualis BC, quoniam per constructionem CE est ad AE, sicut AC ad BD: erit [f] rectangulum sub extremis CE, BD, id est, duplum rectangulum FBD, æquale rectangulo sub mediis EA, AC. Quibus si addatur commune quadratum ex FB vel BC, erit etiam quadratum FB unà cum duplo rectangulo FBD æquale quadrato ex AB [g]. Quibus si rursus addatur commune quadratum ex BD: erunt quoque bina quadrata ex FB, BD simul cum duplo rectangulo FBD, id est [h], quadratum totius FD, æqualia binis quadratis ex AB, BD, id est [i], æquale quadrato ex AD. Vnde & ipsæ rectæ FD & AD æquales erunt. Hinc cum FD æqualis sit ipsis DB, BC simul sumptis, erit etiam AD ipsis DB, BC simul sumptis æqualis. Quod erat faciendum.



f per 16 sexti.
g per 6 secundi.
h per 4 secundi.
i per 47 primi.

THEOREMA.

Si in quadrante circuli A B C sumatur arcus quilibet B D minor quàm 45 gr. cujus duplus sit B E, eorumque tangentes B F, B G: erit ut quadratum radii A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B F ad B G.



Series *Analyseos.*

Esto A B $\propto a$
B F $\propto x$
B G $\propto y$, eritque F G $\propto y-x$
& A G $\propto z$.

Quoniam itaque arcus B E ipsius B D duplus ponitur, ac proinde angulus B A G duplus anguli B A F: erit angulus ad A in triangulo ABG rectâ A F bifariam sectus.

Vnde [a] erit ut F G ad B F, ita A G ad A B
$y-x$ — x — z / a.

a per 3 sexti.

Ideoque [b] ▭ B F, A G æquale ▭^lo F G, A B

b per 16 sexti.

$$xz \propto ay-ax.$$

div. utrinque per x fit $z \propto \frac{ay-ax}{x}$

Hinc ductâ utrâque parte in se quadratè,

add. { □ A B. aa / □ B G. yy } □ A G, per 47 primi.

erit $zz \propto \frac{aayy-2aaxy+aaxx}{xx} \propto aa+yy \propto zz.$

mult. utrinque per xx: $aayy-2aaxy+aaxx \propto aaxx+xxyy$

toll. utrinque $aaxx$: $aayy-2aaxy \propto xxyy$

div. utrinque per y: $aay-2aax \propto xxy$

add. utrinque $2aax$: $aay \propto 2aax+xxy$

toll. utrinque xxy: $aay-xxy \propto 2aax$

div. utrinque per $aa-xx$: fit $y \propto \frac{2aax}{aa-xx}$.

□AB—□BF 2□AB BF BG

Hoc est, erit ut $aa-xx$ ad $2aa$, ita x ad y. Vt proponebatur.

De-

Demonstrationis series eodem modo se habet quo Analyseos, cum utriusque vestigia consentiant, quibus ab hypothesi ad quæsiti conclusionem perducimur. Vti hîc videre est.

Etenim cum [c] sit
ut FG ad BF, ita AG ad AB:
$y - x$ —— x —— z / a
erit quoque [d]
ut □ FG ad □ BF, ita □ AG seu □ AB + □ BG ad □ AB
$yy - 2xy + xx$ —— xx —— zz, id est, $aa + yy$ / aa.
& dividendo [e]
ut □ FG — □ BF vel FH,
id est, ▭ BGH [f] ad □ BF, ita □ BG ad □ AB
$yy - 2xy$ —— xx —— yy / aa.

permutandoque [g]
ut ▭ BGH ad □ BG, vel [h] ut HG ad GB, ita □ BF ad □ AB
$y - 2x$ —— y —— xx / aa.

Id est, invertendo & per conversionem rationis [i],
ut □ AB ad □ AB — □ BF, ita GB ad BH
aa —— $aa - xx$ —— y / $2x$.

& duplatis antecedentibus [k] convertendoque
ut □ AB — □ BF ad 2 □ AB, ita BH ad 2 GB seu BF ad BG [l]
$aa - xx$ —— $2aa$ —— x / y.
Quod erat ostendendum.

c per 3 sexti.
d per 16 sexti.
e per 17 quinti.
f per 6 secundi.
g per 16 quinti.
h per 1 sexti.
i per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti.
k vide Clavium ad 22 quinti.
l per 15 quinti.

Quòd si autem Algebræ ignaris sive in inveniendi arte imperitis ipsa demonstratio sit exhibenda, poterit ea prætermissis jam hisce vestigiis sic adhiberi.

Sumatur FH æqualis FB. Cum igitur in triangulo ABG angulus ad A rectâ AF bifariam sectus sit, erit [m] ut FG ad BF, ita AG ad AB. Sed cum linearum proportionalium etiam proportionalia sint quadrata, erit & [n] ut quadratum FG ad quadratum BF, ita quadratum AG, id est, *per 47 primi*, summa quadratorum AB, BG, ad quadratum AB. Et dividendo [o] ut quadratum FG minus quadrato BF vel FH, id est [p] rectangulum BGH, ad quadratum BF, ita quadratum BG ad quadratum AB; permutandoque [q] ut rectangulum BGH ad quadratum BG seu [r] ut HG ad GB, ita quadratum BF ad quadratum AB. Hoc est, in-

m per 3 sexti.
n per 22 sexti.
o per 17 quinti.
p per 6 secundi.
q per 16 quinti.
r per 1 sexti.

s per Cor. 4 quinti, & per Cor. 19 quinti. t vide Clavium ad 22 quinti. u per 15 quinti.

invertendo & per converſionem rationis[s], ut quadratum A B ad quadratum A B minus quadrato B F, ita G B ad B H; & duplatis antecedentibus[t] convertendoque, ut quadratum A B minus quadrato B F ad duplum quadrati A B, ita B H ad duplum ipſius G B ſeu[u] B F ad B G. Quod erat demonſtrandum.

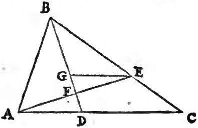
Hinc

„ Si, *Tangens cujuſlibet arcûs minoris quàm 45 gr. ducatur in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii auferatur Tangentis quadratum; Illud productum dividatur per hoc reſiduum: Quotus erit Tangens arcûs dupli.*

Theorema hoc à Clariſſimo viro D. Ioanne Pellio excogitatum atque ingenioſè adhibitum pluribus modis demonſtratum reperitur in tractatu ejus de controverſiis, circa veram circuli menſuram, inter ipſum & Clar. virum D. Chriſtianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum A B C, cujus angulus ad B rectâ B D bifariam ſit diviſus, & ex B C abſcindatur B E æqualis A B, jungaturque A E, ſecans B D in F: dico, ſi agatur E G parallela A C, occurrens ipſi B D in G, eſſe ut B G ad B D, ita A D ad D C, & A B ad B C; nec non D C bis eſſe ad exceſſum; quo D C ſuperat A D, ſicut B D ad D F.



Series *Analyſeos.*

Eſto B D ∞ *b*
A D ∞ *c*
D C ∞ *y*
& D F ∞ *z*.

Quoniam itaque triangulorum A B F, E B F anguli ad B ex hypotheſi ſunt æquales, nec non latera A B, B F & E B, B F, quæ ipſos comprehendunt, æqualia: erunt &[a] anguli ad F æquales, id eſt recti,

a per 4 primi.

baſiſ-

basisque A F basi F E æqualis. Porrò cum [b] propter parallelas A C, G E anguli D A F, F E G in triangulis A F D, F G E æquales sint, ut & [c] anguli ad verticem A F D & G F E, latusque A E lateri F E, ut ostensum est: erunt quoque [d] reliqua latera A D, D F reliquis lateribus E G, G F æqualia. Hinc cum [e] propter similitudinem triangulorum B G E, B D C, B G sit ad G E, id est, A D, sicut B D ad D C; nec non B G ad B E, id est A B sicut B D ad B C: erit quoque [f] permutando B G ad B D, sicut A D ad D C, & A B ad B C. Quod est primum.

b per 29 primi.
c per 15 primi.
d per 26 primi.
e per Cor. 4 quinti.
f per 16 quinti.

Cæterum D C bis esse ad excessum, quo D C superat A D; sicut B D ad D F: ita patet.

Est enim, ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b-2z$ —— b —— c / y.

Ideoque [g] $\square$ B G, D C ∞ $\square^{lo}$ B D, A D. — g per 16 sexti.

$by - 2yz \infty bc.$

add. utrinque $2yz$

$by \infty 2yz + bc$

toll. utrinque bc

$by - bc \infty 2yz$

div. utrinque per $2y$

fit $\frac{by-bc}{2y} \infty z$. Hoc est, erit ut

2 D C DC—AD BD DF

$2y$ ad $y-c$, ita b ad z. Quod est secundum.

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit

ut B G ad B D, ita A D ad D C

$b-2z$ —— b —— c / y.

erit invertendo [h] — h per Cor. 4 quinti.

ut D C ad A D, ita B D ad B G

y —— c —— b / $b-2z$.

& per conversionem rationis [i] — i per Cor. 19 quinti.

ut D C ad D C — A D, ita B D ad D G

y —— $y-c$ —— b / $2z$.

id est, duplatis antecedentibus, [k] — k vide Clavium ad 22 quinti.

ut 2 D C ad D C—AD, ita 2 BD ad DG seu B D ad DF

$2y$ —— $y-c$ —— b / z.

Ex his facile est, cognitis A D, D B, & D C, invenire D F.

Si enim, exempli gratiâ, A D sit 39, D B 45, & D C 325: fiat ut 2 D C 650 ad D C — A D 286, ita D B 45, ad DF $19\frac{4}{5}$.

THEOREMA.

Iisdem positis, dico rectangulum A D C unà cum quadrato D B æquale esse rectangulo A B C.

Series *Analyseos.*

Esto A B ∞ a
B D ∞ b
A D ∞ c
B C ∞ x
D C ∞ y
& D F ∞ z.

a per 13 secundi.

Etenim cum [a] 2 ▭ B D F sit ∞ □ A D + □ D B — □ A B, id est, $2bz \infty cc + bb - aa$:

erit, dividendo utrinque per $2b$, $z \infty \frac{cc + bb - aa}{2b}$.

Vnde cum per antec. Theorema inventum quoq; sit $\frac{by - bc}{2y} \infty z$:

erit $\frac{cc + bb - aa}{b} \infty \frac{by - bc}{y}$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem

$ccy + bby - aay \infty bby - bbc$

add. utrinque aay

$ccy + bby \infty aay + bby - bbc$

toll. utrinque bby

$ccy \infty aay - bbc$

add. utrinque bbc

$ccy + bbc \infty aay$

loco ay substit. cx

$ccy + bbc \infty acx$

div. utrinque per c

▭ADC + □DB ▭ABC

Et fit $cy + bb \infty ax$. Quod erat propositum.

Ex demonstratis in antec. Theoremate vel 3[tia] Sexti, ut AD ad DC, ita AB ad BC.
c — y — a / x.
ac proinde per 16 sexti
▭AD, BC ∞ ▭AB, DC
$cx \infty ay$.

Quo autem pacto in adæquatione hac resolvenda argumentandum sit, ut sequendo vestigia allatæ reductionis, quæ ob superiorem multiplicationem per crucem propriè Algebraïca est,

quæ-

quæſitum Theorematis Geometricè concludatur, ſequens terminorum diſpoſitio docebit.

Ex præcedenti Theoremate eſt
ut 2 D C ad D C—A D, ita B D ad D F
2y —— *y*—*c* —— *b* / *z*.
ac proinde[b] 2 ▭ C D F æqual. ▭ B D C—▭ A D B [b per 16 ſexti.]
α 2*yz* ∞ *by*—*bc*.
Deindè[c] eſt, ut B D ad D C, ita 2 ▭ B D F ad 2 ▭ C D F. aſ- [c per 1 ſexti.]
b —— *y* —— 2*bz* / 2*yz*.
ſumptâ ſc. com. alt. 2 D F, id eſt, 2*z*. [d per 13 ſecundi.]
Hinc cum[d]
2▭BDF æqu.□AD+□DB--□AB, & *α*2▭CDF æqu.▭BDC--▭ADB:
2*bz* ∞ *cc*+*bb*—*aa*, & 2*yz* ∞ *by*—*bc*:
erit ut B D ad D C, ſeu[e] □ B D ad ▭ B D C, [e aſſumptâ com. altit. B D, id eſt, *b*.]
bb —— *by*
ita □AD+□DB—□AB ad ▭BDC—▭ADB.
cc+*bb*—*aa* —— *by*—*bc*
ideoque[f] [f per 19 quinti.]
& reliq. □AB—□AD ad rel. ▭ADB, ut totum ad totum ſeu BD ad DC.
aa—*cc* —— *bc* —— *b* / *y*.

Facile hìc eſſet quæſitum Propoſitionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde in locum a y ſubſtituendo c x. Sed quoniam ſic ad ſolida aſcenditur, de quibus in poſterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem ſuam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addiſci ſolent, poterimus iiſdem ſepoſitis in quæſiti concluſionem ſic ulteriùs argumentari.

Sed ut B D eſt ad D C, ita quoque eſt[g] ▭ A D B ad ▭ A D C; [g aſſumptâ com. altit. A D ſeu *c*.]
b —— *y* —— *bc* / *cy*;
& ut B D ad A D, ita quoque eſt[h] ▭ ADB ad □AD; &[i], [h aſſumptâ com. altit. A D ſeu *c*.]
b —— *c* —— *bc* / *cc*
□ B D ad ▭ A D B ſeu *bb* ad *bc*. [i aſſumptâ com. altit. B D ſeu *b*]

 Erunt

Erunt itaque □AB--□AD,▭ADB,& □AD tres magnitudines
aa—cc——bc.......cc ab una parte;
& □BD,▭ADB,& ▭ADC tres aliæ ab altera
bb.......bc——cy parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:

k *per* 23 *quinti.* quare etiam ex æqualitate[k] proportionales erunt,
id est, □AB—□AD ad □AD, sicut □BD ad ▭ADC.
aa—cc——cc——bb / cy.

l *per* 18 *quinti.* Et componendo [l].
□AB ad □AD, sicut □BD+▭ADC ad ▭ADC
aa——cc——bb+cy / cy.

m *per* 16 *quinti.* Permutandoque [m]
□AB ad □BD+▭ADC, sicut □AD ad ▭ADC seu
aa——bb+cy——cc / cy.
AD ad DC, id est, *c* ad *y*. [n]

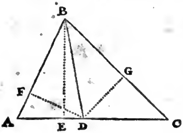
n *per* 1 *sexti.* relictâ sc. com. altit. AD seu *c.*
o *per* antec. Theorema vel 3 *sexti.*
p assumptâ com. altit. AB seu *a.*
q *per* 9 *quinti.*

Sed ut AD ad DC, ita [o] est quoque AB ad BC, seu [p], □AB
c——y——a / x.
ad ▭ABC, id est, *aa* ad *ax*.
Vnde erit ut □AB ad □BD+▭ADC, ita □AB ad ▭ABC.
aa——bb+cy——aa / ax.
Æqualia igitur sunt [q] □BD+▭ADC & ▭ABC.
bb+cy ∞ *ax*. Quod erat ostendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonstratum reperitur Prop^ne^ 20^ma^ secundæ partis prioris tractatus Exercitationum nostrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia

Alia præcedentis Theorematis Analysis, supponendo tantùm 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.



Demissis ex D super A B, B C, perpendicularibus D F, D G, patet, ob angulum A B C rectâ B D bifariam divisum, ipsas D F & D G, ut & F B & B G *per 16 primi* esse æquales. Deinde esto etiam B E perpendicularis ad A C, sitque
A E ∞ a
B D ∞ b
A D ∞ c
B C ∞ x
D C ∞ y
F B vel B G ∞ t, eritque A F ∞ $a-t$,
& G C ∞ $x-t$.
& E D ∞ v, eritque A E ∞ $c-v$,
& E C ∞ $y+v$.

per 47 primi.

Subtr. { □ A D. cc / □ A F. $aa-2at+tt$ } Subtr. { bb. □ B D / tt. □ F B }

□ F D. $cc-aa+2at-tt$ ∞ $bb-tt$. □ F D

dele utrinque tt, & transfer cc & aa

2 ▭ A B F □ A B + □ B D − □ A D

$2at$ ∞ $aa+bb-cc$ *

div. utrinque per $2a$

fit t ∞ $\frac{aa+bb-cc}{2a}$.

Sed t in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam per 3 latera trianguli D B C, hoc pacto:

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}\square DC.\ yy\\ \square GC.\ xx-2xt+tt\end{array}\right. \qquad \text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}bb.\ \square BD\\ tt.\ \square BG\end{array}\right.$$

$$\square DG.\ yy-xx+2xt-tt \ \infty\ bb-tt.\ \square DG$$

del. utrinque tt, & transf. yy & xx

$$2\,\square CBG \quad \square BC+\square BD-\square DC$$

$$2xt \ \infty\ xx+bb-yy\ *$$

* div. utrinque per $2x$

$$\text{fit } t \ \infty\ \frac{xx+bb-yy}{2x}.$$

Sive igitur quæratur t per 3ª latera $\triangle^{li}$ A B D, sive per 3ª latera $\triangle^{li}$ D B C, elucet utique inde * Propositio 13 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa adhibenda sit ad FB vel B G inveniendam.

Erit itaque

$$\frac{aa+bb-cc}{a} \ \infty\ \frac{xx+bb-yy}{x}.$$

diviso utroque denominatore per 2, instituatur multiplicatio per crucem

$$aax+bbx-ccx \ \infty\ axx+abb-ayy$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt ab una parte habeantur

$$bbx-abb \ \infty\ axx-ayy+ccx-aax$$

div. utrinque per $x-a$

$$\text{eritque } bb \ \infty\ \frac{axx-ayy+ccx-aax}{x-a}.$$

Quæratur jam v per 3ª latera trianguli A B D

per 47 primi.

$$\text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}\square AB.\ aa\\ \square AE.\ cc-2cv+vv\end{array}\right. \qquad \text{Subtr.}\left\{\begin{array}{l}bb.\ \square BD\\ vv.\ \square ED\end{array}\right.$$

$$\square EB.\ aa-cc+2cv-vv \ \infty\ bb-vv.\ \square EB$$

del. utrinque vv, & transf. aa & cc

$$2cv \ \infty\ bb+cc-aa$$

div. utrinque per $2c$

$$\text{fit } v \ \infty\ \frac{bb+cc-aa}{2c}.$$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri potest, quærendo eam per 3ª latera trianguli D B C, hoc pacto:

Subtr.

per 47 primi

Subtr. $\left\{ \begin{array}{l} \square BD.\,bb \\ \square ED.\,vv \end{array} \right.$ Subtr. $\left\{ \begin{array}{r} xx.\,\square BC \\ yy+2yv+vv.\,\square EC \end{array} \right.$

$$\square EB.\ bb - vv \ \infty \ xx - yy - 2yv - vv.\,\square EB$$

del. utrinque vv, & transf. bb & $2yv$

$$2\,\square CDE \quad \square BC - \square DC - \square BD$$

$$2yv \ \infty \ xx - yy - bb \quad †$$

div. utrinque per $2y$

$$\text{fit } v \ \infty \ \frac{xx - yy - bb}{2y}$$

Quærendo itaque v per 3ª latera $\triangle^{li}$ D B C, emanat hinc Prop. 12 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa debeat adhiberi ut inveniatur E D.

Quare erit

$$\frac{bb + cc - aa}{c} \ \infty \ \frac{xx - yy - bb}{y}$$

diviso utroque denominatore per 2, Instituatur multiplicatio per crucem

$$bby + ccy - aay \ \infty \ cxx - cyy - cbb$$

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt, ab una parte habeantur

$$bby + cbb \ \infty \ cxx + aay - cyy - ccy$$

div. utrinque per $y + c$

$$\text{\& fit } bb \ \infty \ \frac{cxx + aay - cyy - ccy}{y + c}.$$

Dupliciter igitur invento bb, habebitur æquatio inter $\frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$ & $\frac{cxx + aay - cyy - ccy}{y + c}$.

mult. per crucem

$$axxy - ay^3 + ccxy - aaxy + acxx - acyy + c^3x - aacx$$

$$\infty$$

$$cx^3 + aaxy - cxyy - ccxy - acxx - a^3y + acyy + accy$$

transpositis transponendis, fit

$$2acxx + cxyy + c^3x - cx^3 - aacx + 2ccxy$$

$$\infty$$

$$2aaxy + ay^3 + accy - axxy - a^3y + 2acyy$$

div. utrinque per $2ax + yy + cc - xx - aa + 2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \ \infty \ ay$. Hoc est, erit ut c ad y, ita a ad x.

ac proinde $x \ \infty \ \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \ \infty \ y$. Quæ tertia est Propositio libri sexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \infty \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \infty \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,

□ADC+□DB □ABC

id est, $bb \infty ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \infty ax$. Omnino ut in antecedenti Theoremate. Vnde facile est, cognitis AB, BC, AD, & DC, invenire BD.

Quòd si autem, existente $bb \infty ax - cy$. pro x scribatur $\frac{ay}{c}$ fiet $bb \infty \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \infty aay - ccy$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \infty y$. Vel, resolvendo æqua-

□AB—□AD □BD AD DC

litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb, ita c ad y. Similiter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \infty ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \infty aax - ccx$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \infty x$. Vel,

□AB—□AD

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad

□BD AB BC

bb, ita a ad x. Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus △[li] ABD inveniri possint BC & DC.

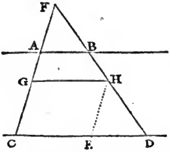
Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 *Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modò idem Theorema emanet verùm etiam Propositio* 12 & 13 *secundi libri,* 3[tia] *sexti, aliæque propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.*

Cæterum calculum hunc multò prolixiorem esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum supposuerimus Theorema, quod ei immediatè præcedit, tum etiam Prop. 12 *aut* 13 *secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singulæ sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si rem*

rem ipsam penitiùs inspicere atque à primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra præsertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectandæ. Quæ quidem hîc refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes hujusmodi calculum sæpenumero valde prolixum evadere, plurimisve terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè præferunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes præterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quòd solummodo circa æquationes versetur ac easdem continuè respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim, quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathesi arduum seu difficile occurrit, id omne per æquationem absque ulla ambage & verborum involucris quàm simplicissime potest explicari.

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis A B, C D, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere F B D, quæ à positione datis abscindat rectas A B, E D, datam inter se rationem habentes A F ad C G, seu a ad d.



Series *Resolutionis.*

Ponatur factum, quod quæritur, hoc est, sit A B ad E D, ut a ad d, sitque A F ∞ a
C F ∞ b
C E ∞ c
& A B ∞ x.

Hinc ut A F ad C G, ita A B ad 4^{tam} seu E D

a —— d —— x / $\frac{dx}{a}$

Sed ex similitudine Δ^{lorum} A F B & C F D est quoque

ut A F ad A B, ita C F $\frac{\text{add. C E. } c}{}$

a —— x —— b / ad C D. $c + \frac{dx}{a}$

Quare erit *per 16 sexti* ▭ A F, C D ▭ A B, C F

$ac + dx \; \infty \; bx$.

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

eritque $ac \; \infty \; bx - dx$.

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \; \infty \; \frac{ac}{b-d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c, ita a ad x.

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut G F ad C E, ita A F ad A B. Vt autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superiùs jam sæpiùs monstratum fuit, atque etiam hîc videre est, præmittendo priùs Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ G H parallelâ A B vel C D ac æquali C E, agatur ex F per H recta F H D, secans A B, C D in B & D: dico A B ad E D esse, sicut A F ad C G, seu a ad d.

Finis *Compositionis.*

A F C G A B E D.

Vnde *per 16 sexti* erit, ut a ad d, ita x ad f.

▭ A F, E D ▭ C G, A B

erit similiter $af \; \infty \; dx$.

▭ A F, C E

Hinc dempto utrinque communi ac,

Quare

□AF,CE+□AF,ED □AF,CE+□CG,AB.

Quare erit etiam $a\,c + a\,f$ ∞ $a\,c + d\,x$.

□CF, AB □AF,CE+□CG,AB.

Erat autem & $b\,x$ ∞ $a\,c + d\,x$.

□CF,AB □AF,CD,seu,□AF,CE+□AF,ED.

Quare *per 16 sexti* erit $b\,x$ ∞ $a\,c + a\,f$.

AF AB CF CD

eritque ex similitudine Δ^{lorum} AFB,& CFD,ut a ad x,ita b ad $c+f$.

Esto jam ED ∞ f,

□CF,AB □AF,CE+□CG,AB.

eritque $b\,x$ ∞ $a\,c + d\,x$.

□CG,AB

Addatur utrinque $d\,x$,

□GF,AB seu □CF,AB—□CG,AB □AF,CE.

erit *per 16 sexti* $b\,x - d\,x$ ∞ $a\,c$

id est, reductâ proportione ad æqualitatem,

GF GH vel CE AF AB

Ex constructione est, ut $b - d$ ad c, ita a ad x:

Principium *Compositionis*.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstructa erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione GF est ad GH vel CE, sicut AF ad AB: erit [a] rectangulum sub extremis GF, AB *a per 16*
æquale rectangulo sub mediis AF, CE. Quibus si addatur com- *sexti.*
mune rectangulum sub CG, AB, erit [b] rectangulum sub tota *b per 1 se-*
CF & AB æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub CG, *cundi.*
AB. Porrò, quoniam ex similitudine triangulorum AFB &
CFD, AF est ad AB, sicut CF ad CD: erit [c] rectangulum *c per 16*
sub mediis CF, AB æquale rectangulo sub extremis, AF, CD. *sexti.*
hoc est, [d] æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub AF, *d per 1 se-*
ED. Erat autem quoque rectangulum sub CF, AB æquale duo- *cundi.*

bus rectangulis sub A F, C E & sub C G, A B. Æqualia igitur erunt bina rectangula sub A F, C E & sub A F, E D binis rectangulis sub A F, C E & sub C G, A B. A quibus si commune auferatur rectangulum sub A F, C E, erit etiam reliquum rectangulum sub A F, E D æquale reliquo rectangulo sub C G, A B. Vnde [e] ut A F ad C G, ita A B ad E D. Quod erat faciendum.

e per 16 sexti.

Hactenus quæ præcesserunt Problemata & Theoremata istius naturæ censeri possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potiùs quàm in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Etenim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Æquationem perducto hæc secundùm certas regulas reducatur resolvaturque, at verò demonstratio Geometrica, quæ ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimodè prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterque per Geometriæ Elementa explicetur: visum nobis fuit hîc consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus præcipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primùm Quæstiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi hujus Geometriæ solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantùm Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quæstiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet plurimas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraïcam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita, ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriæ Elementa jam edoctos non effugiat.

QVÆSTIO.

Quæstio 44 primæ partis libri primi Exercita-

OEnopola duplex habet vinum, unius 8 stufris, alterius 14 stufris constat cantharus. Vult autem mixtionem face-

facere, ita ut dolium vini vendere possit 35 *florenis. Quæritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?* *Quæstionem nostrarum Mathematicarum.*

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stufr. seu a,
& y cantharos secundi 14 stufr. seu b.

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c, & pretium 35 flor. vel 700 stufrorum, quo ipsum vendi debet, vocari d: erit $x + y \propto c$

& $x \propto c - y$.

Quæratur jam quanti constent canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.

1 —— a —— x / facit ax. constant canthari primi vini, in dolium infundendi

Canth. *constat* stufr., *quanti constabunt* Canth. stufr.

1 —— b —— y / facit by. constant canthari secundi vini, in dolium infundendi

—— stufr.

eritque summa $ax + by \propto d$.

transf. by in alt. part. ——
$ax \propto d - by$

divid. utrinque per a ——
fit $x \propto \frac{d - by}{a}$.

Erat autem & $x \propto c - y$.

Quare erit $c - y \propto \frac{d - by}{a}$

mult. utrinque per a ——
$ac - ay \propto d - by$

transf. quantitates, ut quæ in y ductæ sunt unam teneant æquationis partem ——
$by - ay \propto d - ac$

div. utrinque per $b - a$ ——

& fit $y \propto \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y.

Quæstione hâc ita resolutâ, ut constet, quo pacto in quæsiti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inspiciatur sequens illorum interpretatio.

Mult. c. 80 Canth. seu, dolium
per a. 8 stufr.
fiunt ac. 640 stufr. constat dolium plenum vino 8 stufrorum.

Subtr.
Ex d. 700 stufr. constat dolium plenum vino 8 & 14 stufrorum
ac. 640 stufr.
Relinq. $d - ac$. 60 stufri, quibus dolium plus constat impletum vino 8 stufr. & 14 stufrorum, quàm plenum solo vino 8 stufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 stufrorum in dolio contenti cariores sunt cantharis 8 stufrorum, illorum loco sumptis.

stufr.
Ex b. 14
subtr. a. 8 Canth.
$b - a$. 6 stufr. — 1 — $d - ac$. 60 stufr. / facit $\frac{1d - 1ac}{b - a}$ seu 10 canth. 14 stufrorum $\infty\, y$

differentia pretii unius canthari — differentia pretii cantharorum in dolio

subtr.
c. 80 Canth. dolii
rel. $c - y$. 70 canth. 8 stufrorum $\infty\, x$.

QVÆSTIO.

Quæstio 46 primæ partis libri primi Exercitationum nostrarum Mathematicarum.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufr. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriusque fructus 100 seu a simul pro $9\frac{1}{2}$ stufr. seu b habere velit, sequitur ipsam recipere debere $a - x$ pira.

Hinc cum 10 poma seu c offerantur 1 stufro seu d, & 25 pira seu e stufris 2 seu f, quæratur quanti jam constent assumpta x poma, & $a - x$ pira.

Di-

Dicendo:

Poma *constant* stufr., *quanti constabunt* Poma stufr.

c —— d ———————— x / facit $\frac{dx}{c}$. constant poma sumenda

Pira *constant* stufr., *quanti constabunt* Pira

e —— f ———————— $a-x$ / facit. $\frac{fa-fx}{e}$. constant pira sumenda

eritque summa $\frac{dex+cfa-cfx}{ce}$ stufr. $\infty\ b$.

mult. utrinque per ce $dex+cfa-cfx \infty cbe$

transf. cfa ad alt. partem $dex-cfx \infty cbe-cfa$

div. utrinque per $de-cf$ & fit $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$.

Ad fractionis hujus resolutionem, fiat ut c ad d, ita e ad quartam, quæ vocetur g: eritque $cg \infty de$. Vnde pro $x \infty \frac{cbe-cfa}{de-cf}$ scribi poterit $x \infty \frac{cbe-cfa}{cg-cf}$ vel $\frac{be-fa}{g-f}$. Deinde fiat ut e ad f, ita a ad 4^{tam}, quæ vocetur h: eritque $eh \infty fa$; ita ut pro $x \infty \frac{be-fa}{g-f}$ scribi possit $x \infty \frac{be-eh}{g-f}$. Hinc si demum fiat, ut $g-f$ ad e, ita $b-h$ ad 4^{tam}, erit ea $\infty\ x$, quantitati quæsitæ sumendorum pomorum.

Quæ itaque ad quæstionis solutionem citra Algebram sequenti modo argumentandum esse inferunt

Poma stufr. Poma

c d e g

10 —— 1 —— 25 / facit $2\frac{1}{2}$ stufr. constant 25 Poma.

subtr. f. 2 stufr. pretium 25 pirorum.

Relinq. $\overline{g-f}$. $\frac{1}{2}$ stufr. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

Pira stufr. Pira Subtr.

e f a b. $9\frac{1}{2}$ stufr. constant 100 poma & pira simul

25 —— 2 —— 100 / facit h. 8 stufr. constant 100 pira

relinq. $\overline{b-h}$. $1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma & pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam,

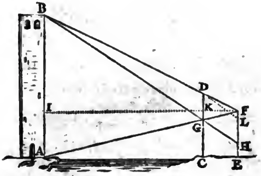
qui-

quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.

ſtufr. differ.	Poma	ſtufr. differ.	Subtr.
$g - f$	e	$b - b$	a. 100
$\frac{1}{2}$ ———	25 ———	$1\frac{1}{2}$ / facit $\underline{x. 75}$ poma	
		& $a - x$. 25 pira.	

PROBLEMA.

Metiri altitudinem turris A B, ut & diſtantiam A C, beneficio duorum baculorum C D, E F, datis G D ∞ a, C E ∞ b, & H F ∞ c.



Eſto A C ∞ x,
& A B ∞ y.

Series *Analyſeos*.

Ductâ I F parallelâ A E, erit propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ A B F & G D F

ut A B ad I F vel A E, ita G D ad K F vel C E.

y ——— $x + b$ ——— a / b.

Ac proinde per 1[illegible] ſexti

$by \infty ax + ab$.

Eodem modo, erit propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ B D G & B F H

ut B D ad B F, ſive I K ad I F

hoc eſt, A C ad A E, ita G D ad H F.

x ——— $x + b$ ——— a / c.

Adeo-

Adeoque per 16 sexti

$cx \infty ax + ab.$

Auferatur utrinque ax,

& fit $cx - ax \infty ab.$

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritque $x \infty \frac{ab}{c-a}$. Hoc est, resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a, ita b ad x.

Iam cum eidem æqualia inter se quoque sint æqualia erit $by \infty cx$. Hoc est, erit ut b ad c, ita x ad y.

Quod si autem invenire lubeat y, non inventâ priùs x, subrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

fietque $by \infty \frac{abc}{c-a}$.

Vbi, si utrinque dividatur per b, invenietur $y \infty \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a, ita c ad y. E quibus itaque hujusmodi Constructio seu operandi modus elucescit.

Sumptâ H L æquali G D, junctaque D K, fiat ut $c - a$ ad a, hoc est, ut F L ad L H, sive F D ad D B, sive etiam F G ad G A, ita E C seu b ad C A seu x; & ita quoque F H seu c ad A B seu y.

Cujus demonstratio ex 2[da] & 4[ta] sexti libri Elementorum perspicua est, quippe considerando rectam D L ipsi B H parallelam secare proportionaliter rectas B F, F H, perinde ac D C, quæ ipsi A B est parallela, secat rectas A F, A E; ut & rectam F E eidem A B parallelam, facientem $\triangle^{la}$ similia G F H & G A B.

Cæterùm ut praxis hujus Problematis cuivis obvia sit, visum fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

digit.

Esto G D $\infty a \infty 24$

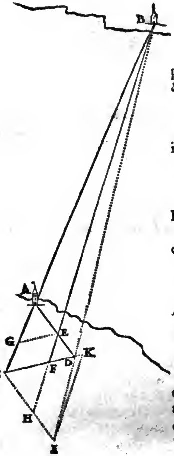
C E $\infty b \infty 30$

& H F $\infty c \infty 25$

Vt F L ad L H
seu F D ad D B,
sive etiam F G ad G A,
1 —— 24, ita { E C. 30 / F H. 25 } ad { C A. 720. / A B. 600. } digit.

PROBLEMA.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire licet, datis C A ∞ a, A D ∞ b, C D ∞ c, A E ∞ d, & C F ∞ e.



Esto A B ∞ x.

Series *Analyseos*.

Ductâ G E parallelâ C D, fiat propter similitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ ADC & A E G,

ut A D ad D C, ita A E ad E G

b —— c —— d / $\frac{cd}{b}$:

itemque

ut A D ad A C, ita A E ad A G.

b —— a —— d / $\frac{a}{b}$.

Hinc propter similia
$\triangle^{\text{la}}$ C B F & G B E.
erit ut

C F ad C B, ita G E add. A B. x

e — $a+x$ — $\frac{cd}{b}$ / ad G B. $\frac{ad+bx}{b}$

Ac proinde per 16 sexti erit
▭ C F, G B æquale ▭ C B, G E

$$\frac{ade+bex}{b} \infty \frac{acd+cdx}{b}.$$

Inventâ igitur æquatione, ut evanescant fractiones, multiplicetur utrinque per b, & fit $ade + bex \infty acd + cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita

ita ut quæ in x ductæ sunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

fietque $bex - cdx \propto acd - ade$.

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

eritque $x \propto \frac{acd - ade}{be - cd}$.

Iam ut æqualitas hæc omnium facillimè in proportionem resolvatur, simulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæsitam lineam A B seu x ex datis quàm brevissimè inveniat : animadvertere oportet, quænam litera plurimùm omnium in hisce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hîc deprehendatur esse d, ipsaque se ter prodat, ubi reliquæ non nisi bis offenduntur, faciendum est, ad deprimendas dimensiones, ut illa in omnibus terminis inveniatur. In quem finem si fiat ut d ad b, ita e ad 4^{tam}, quæ vocetur f: erit $df \propto be$, ac proinde $x \propto \frac{acd - ade}{df - cd}$ seu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d. Vbi si demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam} : erit ipsa $\propto x$, hoc est, $\propto$ quæsitæ lineæ A B. Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium seu proportionum inveniri posse, quæ aliàs 3^{bus} aut pluribus investiganda foret, si nullum in resolvenda hac fractione fieret discrimen.

Vbi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas esse resolubilem, quæ singulæ sicut præcedentes non præter unam dimensionem agnoscunt sive omnino simplices existunt. Nimirum considerando in duobus terminis reperiri cd, & in singulis reliquorum duorum reperiri e; adeò ut, si planum cd in aliud transmutetur, cujus unum latus sit e, litera e sic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti possit. Ac proinde si statuatur, ut e ad c, ita d ad 4^{tam}, quæ vocetur g: erit $eg \propto cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ scribi possit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Vnde si rursus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam}: erit ea $\propto x$, lineæ quæsitæ A B. Quæ quidem animadversio, cum in abstracto fiat nullâ factâ calculi relatione sive restrictione ad figuræ lineas, luculenter ostendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perspicientes hujus Geometriæ Metho-

dum constructiones concinnas aliunde potiùs quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixiùs explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse suffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsiti finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b, hoc est, ut A E ad A D sive C H ad C I, ita C F seu e ad C K seu f. Deinde fiat ut $f-c$ ad $c-e$, hoc est, ut K D ad D F sive I D ad D B, ita C A seu a ad A B seu x.

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eâdem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licèt figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hîc exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cùm præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Vnde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eâdem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opùs plenè edocetur.

Cæterùm ut iis, quibus hujus generis Problemata arrident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud servando priorem fractionis resolutionem secundùm superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

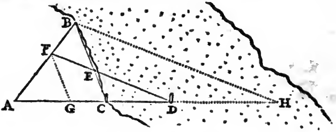
Esto

pedum
Esto CA ∞ a ∞ 450
AD ∞ b ∞ 390
CD ∞ c ∞ 420
AE ∞ d ∞ 225
& CF ∞ e ∞ 252.

Tum fiat
Vt AE ad AD,
sive CH ad CI, ita CF ad CK
225 — 390 — 252 / $436\frac{4}{7}$
CD. 420
subtr. CD. 420 subtr. CF. 252
ped.
Deinde, ut DK. $16\frac{4}{7}$ ad FD. 168, ita CA. 450 / ad AB. 4500.
Sive ut ID ad DB

PROBLEMA.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâque rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur AB ∞ a, BC ∞ b, AC ∞ c, CD ∞ d, & CE ∞ e: oporteatque invenire AF ∞ x.



Series *Analyseos*.

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangulorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG
a — b — x / $\frac{bx}{a}$.

Itemque

ut A B ad A C, ita A F ad A G — A C — G C

a —— c —— x / $\frac{cx}{a}$. quæ ſubducta ex c, relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.

Hinc propter ſimilia △^{la} C E D & G F D

erit

ut E C ad C D, ita F G — add. C D. d

e —— d —— $\frac{bx}{a}$ / ad G D. $\frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per 16 ſexti

▭ E C, G D — ▭ CD, FG

$$\frac{dae+cae-cex}{a} \infty \frac{dbx}{a}.$$

mult. utrinque per a

$$dae+cae-cex \infty dbx$$

add. utrinque cex

$$dae+cae \infty dbx+cex$$

div. utrinque per $db+ce$

$$\&\ \text{fit}\ \frac{dae+cae}{db+ce} \infty x.$$

Ad reſolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur f: eritque $fe \infty db$, adeoque $x \infty \frac{dae+cae}{fe+ce}$ ſeu $\frac{da+ca}{f+c}$. Deinde fiat ut $f+c$ ad a, ita $d+c$ ad x. Quod ipſum docet, ut ex datis lineis inveſtigetur quæſita linea A F, ducendam eſſe ex B lineam B H ipſi F E D parallelam, donec occurrat productæ A C D in H. Cum enim ſtatuendum ſit ut e ad d, hoc eſt, ut C E ad C D, ita b ſeu C B ad 4^{tam} f: patet hanc fore ipſam C H. Ac proinde ſi porrò fiat ut $f+c$ ad a, hoc eſt, ut A H ad A B, ita $d+c$ ſeu A D ad x: manifeſtum eſt inveniri hinc quantitatem quæſitæ lineæ A F; ita ut hîc ſicut in duobus præcedentibus Problematis demonſtratio ex ſola proportionalium applicatione per ſe perſpicua ſit.

Quòd ſi autem quis alio operandi modo aut etiam eodem ſed aliarum linearum ductu quæſitam lineam A F invenire deſideret, obſervare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata ſunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortalitiis, chomatibus, promontoriis, aliiſve, non parvi uſus exiſtat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludoſis à certo

puncto

punĉto ceu termino reĉta linea determinari debet, datum continens virgarum pedumve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hîc explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in direĉtum ipsius A C à C usque ad D definienda esse reĉta C D, continens 10 perticas seu virgas. In quem finem ereĉtis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque A B C, ac inter B & C ereĉto ubicunque quarto E, si mensurentur A B, B C, A C, & C E, sitque, ex. gr., A B ∞ *a* ∞ 15, B C ∞ *b* ∞ 13, A C ∞ *c* ∞ 14, & C E ∞ *e* ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsâ C D ∞ *d* ∞ 10 quærere longitudinem lineæ A F, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

CE —— CD —— CB .... Add.
5 —— 10 —— 13/ad C H. 26 .... A C. 14
add. A C. 14 .... A B .... C D. 10
A H. 40 —— 15 —— A D. 24/ad A F. 9.

Hinc si ab A versùs B in reĉta A B mensurentur 9 perticæ seu virgæ, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in direĉtum ipsius A C progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in direĉtum ipsius F E, reĉta C D tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura, qualis requirebatur.

Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adeat Appendicem nostram de Simplicium Problematum construĉtione, quam unà cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertraĉtantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

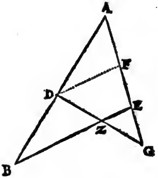
PROBLEMA,

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata 11^mi *Capitis* 1^mi *libri Almagesti* PTOLEMÆI *inventa fuerint seu inveniri possint.*

In reĉtas A B, A G duĉtis utcunque reĉtis B E, D G, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio G D ad D Z,

ut

ut a ad b, nec non ratio Z B ad B E, ut c ad d: oporteatque invenire rationem G A ad A E.



Series *Analyseos.*

Esto G D ∞ a
D Z ∞ b, eritque Z G ∞ $a - b$
B Z ∞ c
B E ∞ d, eritque Z E ∞ $d - c$
A G ∞ x
& A E ∞ y, eritque E G ∞ $x - y$.

Ductâ D F parallelâ B E, erit per 2 sexti

ut G Z ad Z D, ita G E Ex A E. y

$a - b$ —— b —— $x - y$ / ad E F. $\frac{bx - by}{a - b}$ } subtr.

rel. A F. $\frac{ay - bx}{a - b}$.

Tum fiat propter similia △ˡᵃ G Z E & G D F

ut G Z ad Z E, ita G D / ad D F. $\frac{ad - ac}{a - b}$.
$a - b$ — $d - c$ —— a

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine △ˡᵒʳᵘᵐ D A F & B A E

ut D F ad A F, ita B E ad A E

$\frac{ad - ac}{a - b}$ — $\frac{ay - bx}{a - b}$ —— d / y

Et fit per 16 sexti

$$\frac{ady - acy}{a - b} \infty \frac{ady - bdx}{a - b}.$$

Hoc est, omisso communi denominatore $a - b$
erit $ady - acy \infty ady - bdx$.

Vnde dempto utrinque ady, ac reliquis hinc inde translatis, ut signo + adficiantur

habebitur $bdx \infty acy$.

Quæ æqualitas in proportionem sic resolvitur
ut x ad y, ita ac ad bd.

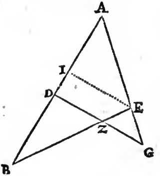
Quod

Quod ipsum docet, rationem quæsitam G A ad A E seu *x* ad *y* esse compositam ex ratione G D ad D Z seu *a* ad *b*, & ex ratione Z B ad B E seu *c* ad *d*, id est, rationem G A ad A E per 23 sexti esse candem, quàm rectanguli sub G D, B Z seu *a c* ad rectangulum sub B E, D Z seu *b d*. Atque ita constat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit seu inveniri possit. Id autem ex Rheinoldi versione ita sonat.

In duas rectas lineas A B & A G deductæ duæ rectæ » lineæ B E & G D secent se mutuò in puncto Z. Dico » quòd ratio G A ad A E composita est ex ratione G D ad » D Z, & ex ratione Z B ad B E. »

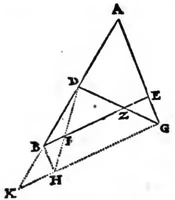
Hinc postquam innotuit, quo pacto datis rationibus G D ad D Z, & Z B ad B E etiam dari intelligatur ratio ipsius G A ad A E, utpote quæ ex datis hisce rationibus est composita: haud inutile fuerit, si ulteriùs hîc ostendam, quibus datis lineis hæc quæsita ratio exprimatur, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem si inventa ratio *a c* ad *b d* ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri potest, sumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæsita ratio in simplicissimis terminis.



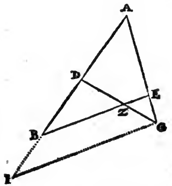
Etenim assumendo communem altitudinem *c*, si fiat ut *c* ad *d*, ita b ad 4^{tam}, quæ vocetur *e*: erit *c e* ∞ *b d*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *a c* ad *c e*, hoc est, rejectâ communi altitudine *c*, ut *a* ad *e*. Quod ipsum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta est E I parallela ipsi G D. Si enim in ea fiat ut *c* ad *d*, id est, ut Z B ad B E, ita D Z seu *b* ad 4^{tam} *e*, erit ea linea E I; ita ut G D ad E I seu *a* ad *e* quæsitam rationem manifestet, eandem quippe quæ est ipsius G A ad A E. Vt patet ex 4ta sexti, propter similitudinem $\triangle^{rum}$ D A G & I A E.

Sic etiam assumendo communem altitudinem *a*, si fiat ut *a* ad *b*, hoc



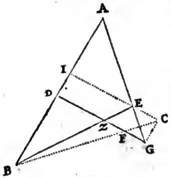
hoc eſt, ut D G ad D Z, ita H G vel B E ſeu *d* ad 4^{tam}, quæ vocetur *f*: erit ea ꝏ Z I. Et fit *af* ꝏ *bd*, ita ut quæſita ratio ſit eadem, quæ *ac* ad *af*, hoc eſt, rejectâ *a* communi altitudine, eadem quæ *c* ad *f* ſeu B Z ad Z I. Hanc autem eandem eſſe, quam ipſius G A ad A E, ita patet.

Productis namque A B, G H donec coëant in K, erit propter ſimilitudinem Δ^{rum} B D Z, K D G, lineamque D H ſimiliter in utroque ductam, ut B Z ad Z I, ita K G ad G H ſeu B E. Vt autem K G ad B E, ita eſt, propter ſimilitudinem Δ^{rum} K A G & B A E, quoque G A ad A E. Quare etiam B Z ad Z I erit, ut G A ad A E. Vnde liquet, ſi *a* pro communi altitudine ſumatur, ducendam eſſe ex G rectam G H ipſi B E parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipſi A G parallelæ in H: eritque, junctâ H D, B Z ad Z I ratio quæſita.



Haud ſecus, ſi aſſumatur communis altitudo *b*, fiatque ut *b* ad *a*, hoc eſt, ut Z D ad D G, ita B Z ſeu *c* ad 4^{tam}, quæ vocetur *g*: erit ea ꝏ I G. Et fit *bg* ꝏ *ac*, ita ut quæſita ratio G A ad A E eadem ſit, quæ *bg* ad *bd*, hoc eſt, rejectâ communi altitudine *b*, eadem quæ *g* ad *d* ſeu I G ad B E. ut patet ex ſimilitudine Δ^{rum} I A G & B A E. Quod ipſum arguit, ſumendo *b* pro communi altitudine, ducendam eſſe ex G rectam G I ipſi B E parallelam, donec occurrat productæ A B in I, ut habeatur ratio quæſita I G ad B E.

Nec

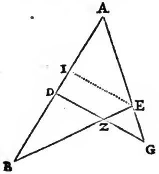


Nec aliter fit, si, assumptâ communi altitudine *d*, fiat ut *d* ad *c*, hoc est, ut BE ad BZ, ita GD vel IC seu *a* ad 4^{tam}, quæ vocetur *b*: erit ea ∞ DF. Et sit *dh* ∞ *ac*, ita ut quæsita ratio sit eadem, quæ *dh* ad *bd*, hoc est, rejectâ communi altitudine *d*, eadem quæ *h* ad *b* seu DF ad DZ.

Hanc autem eandem esse, quam GA ad AE, ita patet.

Est enim, propter similitudinem △^{rum} BDF & BIC, lineamque BE in utroque similiter ductam, ut DF ad DZ ita CI seu DG ad IE. Vt autem DG ad IE, ita est, propter similitudinem △^{rum} DAG & IAE, GA ad AE. Quocirca & DF ad DZ erit, ut GA ad AE. Atque ita liquet, sumendo *d* pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GC ipsi BA parallelam, donec occurrat rectæ per E ipsi DG parallelæ in C, rationem quæsitam esse DF ad DZ.

Cæterùm ut pateat, qua ratione demonstratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo affertur, ex allatis deduci possit; ut & quo pacto exinde plures alias demonstrationes similes conficere liceat: visum fuit eandem unà cum aliis tribus, à me deductis, hîc subjungere, calculique vestigia, quibus innituntur, simul hîc adhibere atque patefacere.



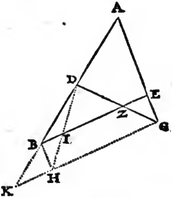
Vt supra est
ZB BE DZ IE
c——*d*——*b* / *e*
& *ce* ∞ *bd*.

Ratio
GA ad AE
ac.......*bd*
vel *ac*.......*ce*
seu GD EI
a .... *e*
DZ . BE
med.term. *b* *d*.
ZB
c

Demonstratio PTOLEMÆI.

„ *Ducatur enim per punctum E linea E I æquidistans „ lineæ G D.*

„ *Quoniam igitur lineæ G D & E I sunt æquidistantes, „ ratio lineæ G A ad A E eadem est, quæ est lineæ G D ad „ lineam E I. Adsumatur autem deforis linea Z D. Erit „ igitur composita ratio lineæ G D ad lineam E I ex ratio- „ ne lineæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ D Z ad „ lineam E I. Quare & ratio lineæ G A ad lineam A E „ composita est ex ratione lineæ G D ad lineam D Z, & ex „ ratione lineæ D Z ad lineam E I. Est autem & ratio „ lineæ D Z ad E I eadem rationi lineæ Z B ad lineam „ B E, cum æquidistantes sint lineæ E I & Z D. Ratio igi- „ tur lineæ G A ad lineam A E composita est ex ratione li- „ neæ G D ad lineam D Z, & ex ratione lineæ Z B ad li- „ neam B E. Quod erat demonstrandum.*



Aliter.

Vt supra est — GD DZ BE vel HG ZI — *a — b —— d / f* — & *af* ∞ *bd*.

Ratio GA ad AE — *ac ...... bd* — vel *ac ...... af* / BZ ZI — seu *c ...... f*

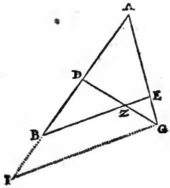
BE vel HG — med. term. *d* — DZ *b* — GD *a*.

Ductâ G K parallelâ ipsi B E, donec occurrat productæ A B in K, agatur B H æquidistans A G, occurrens ipsi K G in H, jungaturque H D, secans B E in I.

Quoniam itaque, propter similitudinem △^rum K A G & B A E, G A est ad A E, sicut K G ad B E vel H G; sed ut K G ad G H, ita quoque est, propter similitudinem △^rum K D G & B D Z, lineamque D H in utroque similiter ductam, B Z ad Z I. Quare etiam

etiam erit G A ad A E, ſicut B Z ad Z I. Hinc aſſumpta forinſecus lineâ B E, quoniam ratio B Z ad Z I compoſita eſt ex ratione B Z ad B E, & ex ratione B E vel H G ad Z I, id eſt, propter ſimilitudinem $\triangle$rum H D G & I D Z, ex G D ad D Z: erit perinde ratio G A ad A E compoſita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione G D ad D Z. Quod erat oſtendendum.

Adhuc aliter.

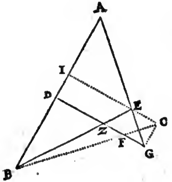


Vt ſupra eſt
DZ GD BZ IG
b — *a* — *c* / *g*
& *bg* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac ...... *bd*
vel *bg* ...... *bd*
IG BE
ſeu *g* ...... *d*
GD . BZ .
a *c* med. ter.
DZ
b

Etenim ductâ G I parallelâ B E, uſque dum occurrat productæ A B in I: erit propter ſimilitudinem $\triangle$rum I A G & B A E, ut G A ad A E, ita I G ad B E. Hinc cum, aſſumptâ forinſecus rectâ B Z, ratio ipſius I G ad B E compoſita ſit ex ratione I G ad B Z, id eſt, propter ſimilitudinem $\triangle$rum I D G & B D Z, ex G D ad D Z, & ex ratione B Z ad B E: erit pariter ratio G A ad A E ex iiſdem rationibus compoſita. Quod erat oſtendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Vt ſupra eſt
BE BZ GD DF
d — *c* — *a* / *h*
& *dh* ∞ *ac*.

Ratio
GA ad AE
ac .... *bd*
vel *dh* .... *bd*
DF DZ
ſeu *h* .... *b*
BZ . .
c DG vel IC
. *a*. med. ter.
BE
d.

Ductâ

Ductâ G C ipsi B A parallelâ, donec occurrat rectæ I E C ipsi D G parallelæ in C, jungatur B, secans D G in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem Δ^{rum} D A G & I A E, G A est ad A E, sicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque est, propter similitudinem Δ^{rum} B I C & B D F, lineamque B E in utroque similiter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, sicut D F ad D Z. Assumatur jam forinsecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z sit composita ex ratione D F ad D G vel I C, sive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit similiter ratio G A ad A E composita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2do Ptolemæi Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

Vnde constat, præsuppositâ Algebræ cognitione, haudquaquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cujusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebræ sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sæpissime illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

Problema.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem resecare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo dissitis.

Iunctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G super A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D super G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata,



drata, quæ fiunt ex A I, I E nec non ex A K, K E quadrato ex A E *per* 47 *primi Elementorum* sunt æqualia, erunt & ipsa inter se æqualia. Est autem quadratum ex E I æquale quadrato ex E K, quippe ob æqualitatem rectarum E I, E K, æquale intervallum indicantium; Quare etiam quadratum ex A I quadrato ex A K æquale erit, adeoque & A I æqualis A K. Hinc cum tria latera trianguli A I E æqualia sint tribus lateribus trianguli A K E, erit quoque angulus I A E angulo K A E *per* 8 *primi* æqualis, ac proinde angulus B A D per rectam A E bifariam divisus. Haud secus liquet, angulos ad B, C, & D per rectas B F, C G, & D H bifariam divisos esse.

Series *Analyseos.*

Esto A B ∞ *a*
B C ∞ *b*
C D ∞ *c*
D A ∞ *d*
& E I, F L, F M, G N, G O, D P, D Q, vel E K ∞ *x*.

Iam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum semisses dati sint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hosce constitutorum data quoque ratio laterum.

Pona-

Ponatur itaque E I ad I A vel E K ad K A esse, ut e ad f
F L ad L B vel F M ad M B, ut e ad g
G N ad N C vel G O ad O C, ut e ad h
& D P ad P H vel D Q ad Q H, ut e ad i.

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
ut e ad f, ita x / ad $\frac{fx}{e}$
FL vel FM LB vel BM
ut e ad g, ita x / ad $\frac{gx}{e}$
GN vel GO NC vel CO
ut e ad h, ita x / ad $\frac{hx}{e}$
DP vel DQ PH vel HQ
ut e ad i, ita x / ad $\frac{ix}{e}$

Additis jam A I, A K, L B, B M, N C, C O, si ipsarum summa $\frac{2fx+2gx+2hx}{e}$ auferatur ex $a+b+c+d$, summa laterum A B, B C, C D, & D A, relinquetur $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx}{e}$, summa rectarum I L, M N, O D, & D K, id est, ipsarum E F, F G, G P, & Q E. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum P H, H Q, erit $a+b+c+d\frac{-2fx-2gx-2hx+2ix}{e}$ summa laterum internorum E F, F G, G H, & H E. Porrò quoniam portio abscindenda, quæ vocetur k, pro trapezio accipi potest, cujus duo latera sunt parallela, fit ut si A B, B C, C D, & D A in rectam lineam A R junctim collocentur, ut & E F, F G, G H, & H E in rectam lineam E T, trapezium A R T E ipsi portioni abscindendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regulam hujus area quæratur, addendo scilicet latera parallela A R & E T, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudinem E I seu x, habebitur æquatio inter $ax+bx+cx+dx\frac{-fxx-gxx-hxx+ixx}{e}$ & k, id est, æquatione ritè ordinatâ, erit $xx \infty \frac{aex+bex+cex+dex}{f+g+h-i} - \frac{ke}{f+g+h-i}$. Cujus radices inveniuntur operando ulteriùs, quemadmodum pag. 7 hujus Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæsitâ EI manifestè majorem, idcirco meritò hìc erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis E I vel E K, F L vel F M, G N vel G O, & D P vel D Q descriptis circulis rectæ A I vel A K, L B vel B M, N C vel C O, & P H vel H Q tangentes sunt complementorum semissium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, si *e* pro radio sumatur, ipsæ *f*, *g*, *h*, & *i* dictas tangentes designent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum sit, à quibus hujusmodi portio resecari debet: haud difficulter poterimus, si angulos A, B, C, similesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujusce generis existunt, atque præterea æquationis constitutionem spectemus insuper, quænam ad illam resolvendam sive ad quæsitam latitudinem ex ea obtinendam sint facienda, regulam inde generalem formare, quæ sic se habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur summa per radium 100000, productumque dividatur per summam tangentium, angulorum qui semissium datorum sunt complementa, cùm videlicet dati anguli omnes sunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni existunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abscindendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam summam vel differentiam tangentium, & fit secundum inventum. Quo subducto à quadrato semissis primi inventi, si reliqui radix ab eodem semisse auferatur, relinquetur latitudo quæsita.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propositum solvendum sit, ipsius veritas ex sequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm est aliena, manifesta fiet; si modò ibidem consideraverimus, completo parallelogrammo A R S E, productisque A E, R T donec coëant in X, rectam S T, duplum supra dictæ summæ vel differentiæ tangentium referre, atque demissis perpendicularibus R V & X Y rectam S T ad R V, ob similitudinem triangulorum S T R & A R X, eam habere rationem, quam A R habet ad X Y.

Angul.

A. 50. 0′   Add.

semissis. 25. 0′, ejus Tang. Compl.

B. 50. 38′   A I vel A K est 214451

semissis. 25. 19, ejus Tang. Compl.

C. 54. 12′   L B vel B M est 211392

semissis. 27. 6, ejus Tang. Compl.

N C vel C O est 195417

D. 205. 10′   621260 } subtr.

semissis. 102. 35 [illegible] sTang. Compl.

[illegible] P H vel H Q est 22322

differentia 598938

	Add.	
A B.	53	64
B C.	50	1
C D.	21	07
2 Rad. R V. D A.	24	8

partes S T. 1197876—100000—AR. 149,61 (2)

multipl.

A R. 14961 (2)

ad X Y. 1249 (2).

134649

59844

29922

14961

product. 1868|5289 (4)

Vt △ A R X seu ½ X Y, A R ad □ X Y seu X Y, X Y, vel, relicta communi altitudine X Y ut ½ A R ad X Y, sive etiam, propter simil. △^{rum} S T R & A R X ut ½ S T ad R V, ita

semissis seu triang. A R X. 934|3144 (4)

subtr. part. resec. seu trap. A R T E. 600

598938—100000—rel. triang E T X. 334|3144 (4) / ad □ X Z. 55|81|78 (4)

eritque X Z. 7| 4| 7 (2)

Hinc subducta X Z seu 747 (2) ex X Y seu 1249 (2), relinquetur 502 (2) pro Y Z latitudine quæsita portionis abscindendæ.

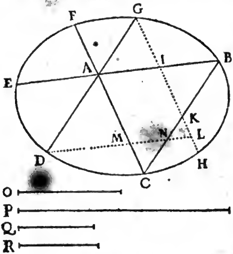
Cæterùm cum non absimili modo à data qualibet figura rectilinea portio datæ magnitudinis abscindi possit, aut etiam quæ ipsius figuræ certam partem sive partes contineat, lineis quibusdam duntaxat lateribus parallelis & ab iisdem æquali intervallo distantibus: plura hac de re afferre supervacaneum duximus, præsertim cum materiam hanc nec non determinationes eò spectantes jam sæpiùs in Lectionibus nostris Publicis abundè pertractaveri-

verimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse certò sciverimus.

THEOREMA,

quod ad solutionem artificiosissimam Problematis pag. 372 ut concessum supponitur.

Cum in rimanda olim solutione Problematis p. 372 nonnulla deprehendissem, quæ ad eandem ut concessa supponebantur, eaque post commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id Geometricè resoluto corroboråssem: visum fuit calculum è quo eandem resolutionem tunc deprompsi hîc in medium afferre, ac quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cuivis ob oculos ponere. In quem finem si huc revocetur Theorema jam dictum unà cum illis, quæ ad explicationem ejus p. 369 & 370 ulteriùs sunt allata, inspiciendus erit deinceps sequens calculus.



Assumpto quæsito ut vero, hoc est, C A esse ad A F, sicut C B ad A G ducatur porrò D L parallela A B, secans C A, C B in M & N, ac occurrens ipsi G H in L, ponaturque D A ∞ y.

Deinde calculus sic procedat

Ex assumptione est
C A A F C B A G
c —— d —— b / ad $\frac{db}{c}$ ∞ z.

Ex similitudine △lorum B A C & A I G est
BC CA· AG GI
b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d. Vnde IK erit ∞ $c - d$. pro qua brevitatis causâ scribatur f.

Et apparet ex hac assumptione G I inveniri æqualem F A.

 item-

itemque

CA AB GI IA

c — a — d / ad $\frac{ad}{c}$ } add.

Ex similitudine Δ^{rum} C A B & K I B est

A E. e

E I. $\frac{ce+ad}{c}$ } Mult.

CA AB KI

c — a — f / ad I B. $\frac{af}{c}$

□EIB. $\frac{ceaf+adaf}{cc}$

Denique ex natura Ellipsis, per 17.3[tii] Conicorum Apollonii,

□GIH est ad □F A C.

Seu, propter rectas G I, F A, supra æquales,

IH ad A C, ut □EIB ad □EAB.

$\frac{cef+adf}{ce}$ — c — $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea

Et fit, multiplicando tum medios tum extremos, $ace+aad \infty ace+aad$.

Ex hypothesi est

BA AE BC AD

a — e — b / ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3[tii] Conicorum Apollonii, proportionalia sunt

□FAC □GKH □DAG □CKB

dc — cx — yz — $bz-zz$

seu, rejectis communibus altitudinibus A C, G K; & A G, C K

FA KH DA KB

d — x — y — $b-z$

hoc est, restitutis valoribus ipsarum y & z

d — x — $\frac{eb}{a}$ — $\frac{cb-db}{c}$ seu $\frac{fd}{c}$

Vnde K H seu x, per 16. 6[ti], fit ∞ $\frac{acd-add}{ce}$ seu $\frac{adf}{ce}$

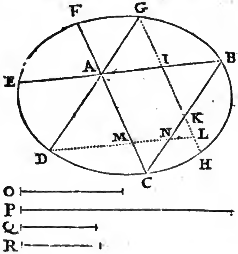
add. I K. f.

I H. $\frac{cef+adf}{ce}$

Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenerimus, quæsitum illud, quod cum hoc concesso omnimode connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.

Porrò ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supradicta resolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hic ulteriùs ita disponere, dictamque resolutionem illi à latere sic adhibere, ut cuivis sedulò hæc inspicienti enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutuus consensus existat. Præsertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas conficiendi, sub-

subministraverit; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unicè studuisse videntur, quò sua inventa eorumque demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.



Ex assumptione

CA AF CB AG

c —— d —— b / ad $\frac{db}{c}$ ∞ z

Et permutando per 16. 5

CA CB AF AG

c —— b —— d / ad $\frac{db}{c}$

Ex similitudine △rum BAC, AIG

BC CA AG GI

b —— c —— $\frac{db}{c}$ / ad d.

Et convertendo per Cor. 4. 5

CA CB GI AG

c —— b —— d / ad $\frac{db}{c}$.

Quoniam igitur supponitur CA esse ad AF, sicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB. sicut AF ad AG. Iam quia, ex similitudine △rum BAC & AIG, BC est ad CA, sicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, sicut GI ad AG: erit AF per 9.5ti ipsi GI æqualis. Eodem modo æquales erunt EA & DM.

Quia hîc ex assumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem quam AF, colligitur inde ipsas æquales esse.
Haud secus æquales erunt EA & DM.

Ex hypothesi

BA AE BC AD

$a - e - b //$ ad $\frac{eb}{a} \infty y$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3tii Conicorum Apollonii

▭FAC ▭GKH ▭DAG ▭CKB

$dc - cx - yz - bz - zz$

H.e., rejectis communibus altitudinibus A C, G K; & A G, C K,

FA KH DA KB

$d - x - y - b - z$

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

$d - x - \frac{eb}{a} - \frac{eb - db}{c}$ seu $\frac{fb}{c}$

$ceb - afb$

KH $ce - af$

Fit $x \infty \frac{adf}{ce}$.

Iam ut ex Elementis constet, quo pacto ratio ipsius D A ad K B in simplicissimis terminis exprimi possit, cum via illam inveniendi multiplicatione per crucem (quemadmodum vulgo fit) omnino sit Algebraïca: calculum hîc apponam è quo ipsæ D A & K B resultant.

BA AE BC AD

$a - e - b //$ ad $\frac{eb}{a}$

CA IK BC KB

$c - f - b //$ ad $\frac{fb}{c}$

EA AB

$e - a$

CA IK

23.6. $c - f$

▭CAE ▭KI,AB

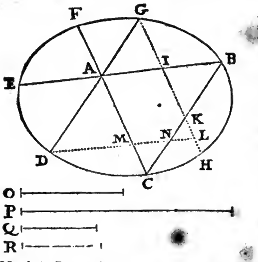
$ce - af$

Vbi apparet, cum in utraque hac proportionis regula idem terminus B C ipsis A D & K B præcedat, quod ratio ipsius A D ad K B, per hujus B C interpositionem, sit composita ex ratione A D ad B C seu E A ad A B, hoc est, e ad a, & ex ratione B C ad K B seu C A ad I K, hoc est, c ad f. Ac proinde, cum ratio ex his composita, per 23. 6, sit eadem rationi, quam habet ▭CAE ad ▭KI,AB, seu ce ad af: erit quoque

Porrò cum ex natura Ellipsis ▭ F A C sit ad ▭ G K H, seu, propter rectarum A C, G K æqualitatem, F A ad K H, sicut ▭ D A G ad ▭ C K B, h.e., propter æqualitatem rectarum A G, C K, ut D A ad K B; & quidem ratio D A ad K B, composita sit ex ratione D A ad C B seu E A ad A B, & ex ratione C B ad K B seu C A ad I K: erit quoque ratio F A ad K H composita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K. Ideoque cum ratio composita ex ratione E A ad A B, & ex ratione C A ad I K, sit ea, quam habet ▭CAE ad ▭KI,A B: erit similiter ratio ipsius F A ad K H ea, quam habet ▭ C A E ad ▭ K I, A B.

que

que ratio ipsius F A ad K H seu d ad x eadem, quam habet □ C A E ad □ K I, A B, seu ce ad af.



Ad comparandam I H cum A C, quia, inventâ $KH \infty \frac{adf}{ce}$, ad K H addi priùs debet I K ∞f, ut habeatur I H $\infty \frac{cef + adf}{ce}$, sed hoc pacto ratio ipsius I H ad A C non satis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæsivi priùs rationem ipsius I H ad I K; inde per compositionem rationis conversam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipsius I H ad A C, ut sequitur.

Esto K I ad F A, K H
f ———— d x
ut O ad C A.
3 * $\frac{cf}{d}$ ———— c.
Mult. per A E. e . . . . e
hoc est, ut □ O, A E ad □ C A E □ K I, A B
per 1. 6. $\frac{cef}{d}$ ———— ce . . . . . . af
Vnde ex æquo & per compositionem rationis conversam erit
Vt K I + K H seu I H ad K I,
$f + x$ ———— f
sic □ O, AE + □ KI, A B ad □ O, AE.
$\frac{cef}{d} + af$ ———— $\frac{cef}{d}$

Esto jam KI ad F A, sicut linea O ad C A. Vnde, assumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad F A, sicut □ sub O & A E ad □ C A E. Erat autem F A ad K H, sicut □ C A E ad □ K I, A B. Quare ex æquo erit ut K I ad K H, sic □ O, A E ad □ K I, A B; & per compositionem rationis conversam K I + K H seu I H ad K I, sicut □ O, A E + □ K I, A B, ad □ O, A E.

Sit

IH Sit KI ad AC,

$f+x$ . . . . f ——— c

ut O ad P. 4*

$\frac{cf}{d}$ ——— $\frac{cc}{d}$

Mult. per A E. e . . . . e

hoc est,

▭O,AE+▭KI,AB ut ▭O,AE ad ▭P,AE

$\frac{cef+adf}{d}$ . . . . $\frac{cef}{d}$ ——— $\frac{cce}{d}$

Vnde ex æquo erit ut I H ad A C, ita ▭ O, A E + ▭ K I, A B ad ▭ P, A E.

Sed ut I H ad A C, ita quoque est propter rectas I G & F A supra æquales mult. per I G . . . . . . F A per 1.6. ▭GIH ad ▭FAC, hoc est, per 17.3tii Conic. Apoll., ut ▭EIB ad ▭EAB

Quocirca erit ut ▭O,AE+▭KI,AB ad ▭ P, A E, ita ▭E I B ad ▭E A B.

Deinde sit ut K I ad A C, ita O ad P. Vnde, assumptâ A E pro communi altitudine, erit K I ad A C, sicut ▭ O, A E ad ▭ P, A E. Sed ut I H ad K I, ita est ▭ O, A E + ▭KI,AB ad ▭O,AE. Quapropter ex æquo erit ut I H ad A C, sic ▭ O,AE+▭KI,AB ad ▭P,A E. Cum verò rursus, ut ante, ▭GIH sit ad ▭FAC, sicut ▭ E I B ad ▭ E A B; & quidem IG & A F, ut supra, æquales sint ostensæ: erit quoque I H ad A C, sicut ▭EIB ad ▭EAB. Vt autem IH ad AC, sic quoque erat ▭ O; A E + ▭ K I, A B ad ▭ P, A E. Quocirca erit ut ▭ O, A E+▭ K I, A B ad ▭P, A E ita ▭E I B ad ▭E A B.

Fiat jam, ut A E ad A B, ita KI ad Q

e —— a —— f / $\frac{af}{e}$. 5*

eritque per 16.6. ▭KI,AB ∞ ▭Q,AE. Adeoque ut

▭O,AE+▭KI,AB, seu Q,AE ad ▭P,AE, hoc est, rejectâ communi altitudine A E,

ut O + Q ad P, sic ▭ E I B ad ▭E A B.

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e}$ ——— $\frac{cc}{d}$ ——— $\frac{ceaf+adaf}{cc}$ — ea

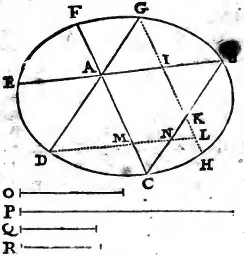
Fiat jam ut A E ad A B, ita K I ad Q: eritque ▭KI, AB æquale ▭Q, A E. Hinc ut ▭ O, A E plus ▭KI,AB seu Q, AE, ad ▭P, AE, hoc est, destruendo communem altitudinem A E, ut O + Q ad P, sic ▭ E I B ad ▭ E A B.

Explicita itaque est ratio, quam habet ▭ G I H ad ▭ F A C, quippe ostensa est eadem quæ ipsius I H ad A C, seu O + Q ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter □ E I B & □ E A B.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^{or} dimensiones ascenditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota resolutio duntaxat per rectarum aut planorum considerationem absolvatur.



E I seu E A + A I ——— E A

$\frac{ce + ad}{c}$ ——— e

23.6 I B ——— A B

$\frac{af}{c}$ ——— a

□ E I B seu □ sub E A + A I in I B ——— □ E A B

$\frac{ceaf + adaf}{cc}$ ——— ea

Vt E I seu E A + A I est ad E A,

$\frac{ce + ad}{c}$ ——— e

Mult. per C A. c c

sic □ E A, C A + □ A I, C A est ad □ C A E.

$ce + ad$ ——— ce

Vel, si pro □ E A, C A, propter similitudinem Δ^{rum} C A B & A M D, ubi C A est ad A B,

Porrò quoniam ratio □^{li} E I B ad □ E A B composita est ex ratione E I seu E A + A I ad E A, & ex ratione I B ad A B; & quidem E A + A I ad E A, si com-

ſicut A M ad MD ſeu E A ſcribatur ▭B A M; ſicut ▭ B A M + ▭ C A I ad ▭ B A M.

Vel rurſus, ſi pro ▭C A I, propter ſimilitudinem Δ^{rum} B A C & A I G, ſcribatur ▭ B A, G I, ſicut ▭ B A M + ▭ B A, G I ad ▭ B A M, ſicut A M + G I, hoc eſt, G L ad A M.

Vide ſupra ad notam 1 *

hoc eſt, relictâ communi altitudine B A,

Vt I B eſt ad A B,

$\frac{af}{c}$ ——— a

Mult. per C A

o c

ita ▭ I B, C A eſt ad ▭ C A B.

af ——— ca

Vel, ſi pro ▭ I B, C A, propter ſimilitudinem Δ^{rum} C A B & K I B, ſcribatur ▭ K I, A B, ſic ▭ K I, A B, ad ▭ C A B, hoc eſt, relictâ communi altitudine A B, ſicut K I ad C A.

Vide ſupra ad notam 2 *

communis aſſumatur altitudo C A, ſit ſicut ▭CAE, ſeu B A M, + ▭C A I ſeu B A, G I ad ▭C A E ſeu B A M, hoc eſt, relinquendo communem altitudinem B A, ſicut A M + G I ſeu G L ad A M; at verò I B ad A B, ſicut ▭ I B, C A ſeu K I, A B ad ▭ C A B, hoc eſt, deſtruendo communem altitudinem A B, ſicut K I ad C A: Erit quoque ratio ▭^{li} E I B ad ▭ E A B, hoc eſt, ipſius O + Q ad P, compoſita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

Conſtat igitur, rationem ▭^{li} E I B ad ▭ E A B ſeu ipſius O + Q ad P eſſe compoſitam ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A.

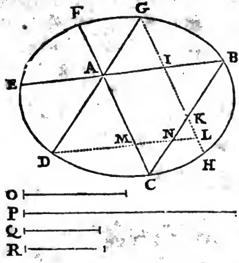
Iam quia ſuperior ratio ipſius O + Q ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipſi ductæ ſunt, reſpondet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, ſi cum ratione G L ad A M, aut K I ad C A confertur, ex his compoſitam eſſe, quemadmodum ex aſſumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

K I ad Q, ſic F A ad R.

f —— $\frac{af}{c}$ —— dl $\frac{ad}{c}$. 6*

eritque, per 16. 6^{ti}, ▭K I, R ∞ ▭ Q, F A.

Denique fiat ut K I ad Q, ſic F A ad R: eritque ▭ K I, R æquale ▭ Q, F A. Ac proinde cum O + Q ad P,



Vt O + Q est ad P,

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e}$ ——— $\frac{cc}{d}$

Mult. per FA. d . . . . d

ad P, assumendo communem altitudinem F A, sit sicut ▭ O, F A seu K I, C A, + ▭[lo] Q, F A seu K I,

sic ▭O,FA seu KI,CA,+▭Q,FA seu KI,R est ad ▭P,FA seu □CA. Rad ▭P, F A seu □ C A: Erit ratio composita ex ratione G L ad A M, & ex ratione K I ad C A eadem rationi ▭[li] K I, C A + ▭K I, R ad □ C A, hoc est, eadem rationi, quæ componitur ex ratione K I ad C A, & ex ratione C A + R ad C A. Ideoque si communis auferatur K I

Vide supra ad notam 3 * $cf + \frac{daf}{e}$ ——— cc

Cur ▭ P, F A sit ∞ ▭ C A, ita concluditur

3 * Est namque K I ad F A, ut O ad C A;

f —— d —— $\frac{cf}{d}$ —— c

& convertendo

F A ad K I, C A

d —— f . . . . c.

ut C A ad O. P

c —— $\frac{cf}{d}$ . . . . . $\frac{cc}{d}$

Vide supra ad notam 4*

Vnde ex æquo erit

ut F A ad C A, ita C A ad P.

d —— c —— c —— $\frac{cc}{d}$

Ac proinde, per 17. 6ti, ▭ P, F A ∞ □ C A.

KI		CA
f	———	c

23.6.

CA + R		CA
$c + \frac{ad}{e}$	———	c
▭KI,CA + ▭KI,R		□CA
$cf + \frac{daf}{e}$	———	cc

ratio KI ad CA, erit quoque reliqua ratio GL ad AM eadem reliquæ rationi CA + R ad CA hoc est, erit GL ad AM, ut CA + R ad CA. Quod verum esse deinceps sic ostenditur.

Hinc cum ratio ▭^{li} GIH ad ▭ FAC sive ipsius IH ad AC eadem sit ostensa quæ ipsius O + Q ad P, & hæc rursus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA; at verò ratio ▭^{li} EIB ad ▭ EAB eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: sequitur, si ratio ▭^{li} GIH ad ▭ FAC (quemadmodum suppositum fuit) eadem sit rationi ▭^{li} EIB ad ▭ EAB, rationem compositam ex KI ad CA, & ex ratione CA + R ad CA debere quoque eandem esse rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, si utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA + R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per se evidens sit, superest ut ipsum sequenti argumentatione resolvamus atque penitus manifestum reddamus.

Ex similitudine △^{lorum} ABC & MDA est

AB AC MD seu AE MA seu IL

a — c ——— e / ad $\frac{ce}{a}$. Vnde GL fit ꝏ $d + \frac{ce}{a}$.

Ex similitudine △^{lorum} ABC & IAG est

BA AC AI IG seu AF

a — c — $\frac{ad}{c}$ — d

Ac proinde, per 16.6^{ti}, ▭ BAF ꝏ ▭ CAI.

Ex similitudine △^{lorum} GLD & AMD est

GL ad AM,

$d + \frac{ce}{a}$ ——— $\frac{ce}{a}$

Quoniam enim, propter similitudinem triangulorum GLD & AMD, est ut GL ad AM ita DL seu EI ad

DM

sicut D L seu E I ad D M seu E A;

$e + \frac{ad}{c}$ ——— e

mult. per C A. c .... e

Vel per 1. 2di sicut ▭ E I, C A seu C A E + C A I seu AE, R ad ▭ CAE.

$ce + ad$ ——————— ce

hoc est, relictâ communi altitudine A E sicut C A + R ad C A.

Ex constructione est

Vide supra ad notam 6*

KI Q FA R

f —— $\frac{af}{c}$ —— $d/$ $\frac{ad}{c}$

itemque AE AB · KI Q

Vide supra ad notam 5*

e —— a —— $f/$ $\frac{af}{c}$

Ideoque AE AB FA R

per 11. 5ti. e —— a —— d — $\frac{ad}{c}$

Ac proinde per 16. 6ti, ▭ B A F ∞ ▭ A E, R.

D M seu E A; ut autem E I ad E A, ita, assumptâ communi altitudine C A, ▭ E I, C A seu C A E plus ▭ C A I seu A E, R est ad ▭ C A E: Erit ut G L ad A M, ita ▭ C A E + ▭ R, A E ad ▭ C A E, hoc est, destruendo communem altitudinem A E, sic C A + R ad C A.

Hinc cum ▭ B A F etiam sit ∞ ▭ C A I, erit similiter ▭ A E, R ∞ ▭ C A I.

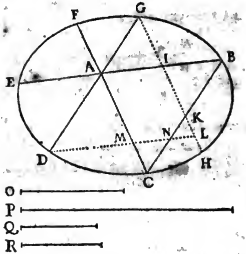
Patet itaque G L esse ad A M, sicut C A + R ad C A. Vt erat propositum.

Quare cum hoc pacto, assumentes quæsitum tanquam verum, per resolutionem Geometricam devenerimus ad verum concessum: sequitur, quæsitum illud, quod cum concesso isto omnimodè connectitur, verum esse. hoc est, umbram baculi C, quæ transibat per A, transiisse similiter per B. Quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem, quæ Resolutionem Geometricam Theorematis concernunt, quod ad solutionem Problematis pag. 372 ut concessum suppositum fuit. Cæterùm quoniam iis, qui cum Logicis statuunt ex falsis etiam posse verum concludi, resolutio hæc ad quæsiti ostensionem incerta videri potest: placuit majoris certitudinis ergo idem Theorema Syntheticè verificare, procedendo à concessis ad quæsita, prout ad hoc me instigavit præstantissimus ac unde-

undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hartsingius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematis discipulus meus solertissimus.

Demonstratio autem ipsa filum calculi sequitur, qualis extat pag. 370 & 371, at eodem nonnihil hic immutato; ut appareat passim artificium, quo singula Geometrice explicari queant.



Positâ, ut ante, A D ∞ y

erit ut B A ad A E, ita B C ad A D

a —— e —— b / ad y seu $\frac{be}{a}$.

ac proinde per 16. 6^ti

▭ B A, A D, ▭ B C, A E

a ay ∞ be.

Ex natura Ellipsis per 17. Conicorum Apollonii

A D. y K B. $b - z$

A G. z AG vel CK z

est ▭ D A G. $\overline{yz}$ ad ▭ CKB. $\overline{bz - zz}$,

F A. d K H. x

A C. c. AC vel K G. c

ut ▭ F A C. $\overline{cd}$ ad ▭ G K H. $\overline{cx}$.

Quoniam igitur ex hypothesi est B A ad A E, sicut B C ad A D: erit ▭^lum sub extremis B A, A D a æquale ▭^lo sub mediis B C, A E. Deinde quoniam ex natura Ellipsis est, ut ▭ D A G ad ▭ CKB, sive, rejectâ communi altitudine A G vel C K, ut D A ad K B, ita ▭ F A C ad

AG AC

id est, rejectis communibus altitudinibus a & c,

erit ut D A ad K B, ita F A ad K H

y —— b — z —— d / ad x.

BA

sive, assumendo communem altitudinem a,

ut ▭BA, AD seu ▭BC, AE ad ▭BA.KB, ita FA ad KH

a ay vel bc —— ab — az —— d / ad x. δ

Esto jam K I ∞f.

eritque propter similitudinem Δ^{rum} B C A & B K I

ut B C ad C A, ita B K ad K I

b —— c —— $b - z$ / ad f seu $\frac{cb - cz}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}.

add. H K. x ▭BC.KI, ▭CA,BK

mult. H I. $\overline{f+x}$

per I G. b ζ bf ∞ $cb - cz$

Deinde sit I G ∞ h.

▭GIH. $fh+hx$

eritque propt. simil. Δ^{rum} B C A & A G I

ut B C ad C A, ita A G ad G I

b —— c —— z / ad h seu $\frac{cz}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}

▭BC, IG ▭CA, AG

Similiter esto A I ∞ k. β bh ∞ cz.

eritque propter simil. Δ^{rum} B C A & A G I

ut B C ad B A, ita A G ad A I

b —— a —— z / ad k seu $\frac{az}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}

add. A E. e ▭BC, AI ▭BA, AG

mult. E I. $\overline{k+e}$ ϵ. bk ∞. az.

per I B. l

▭E I B. $kl+el$

Sit item I B ∞ l.

eritque propter simil. Δ^{rum} B C A & B K I.

ad ▭G K H, id est, relictâ communi altitudine A C vel G K, ita F A ad K H; & quidem D A ad K B, si B A pro communi altitudine sumatur, fit sicut ▭BA, AD seu a B C, A E ad ▭B A, K B: erit ut ▭B C, A E ad ▭ B A, K B, ita F A ad K H.

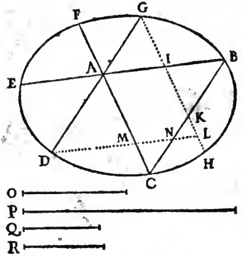
Porrò cum ex similitudine Δ^{rum} B C A & B K I, B C sit ad C A, sicut B K ad K I: erit ▭ sub B C, K I æquale ▭^{lo} sub C A, B K. Eâdem ratione cum B C sit ad B A, sicut B K ad B I: erit ▭ sub B C, B I æquale ▭^{lo} sub B A, B K.

Haud secus cum similia sint Δ^{la} B C A & A G I, ac idcirco B C ad C A, sicut A G ad G I: erit ▭ sub B C, G I æquale ▭^{lo} sub C A, A G. Similiter cum B C sit ad

ut

ut B C ad B A, ita B K ad B I
b——*a*——*b*—*z*/ ad *l* seu $\frac{ab--az}{b}$. ac proinde per 1[illegible]. 6^{ti}
▭ B C, B I ▭ B A, B K
γ *bl* ∞ *ab*—*az*.

B A, sicut A G ad A I: erit pariter ▭ sub B C, A I æquale ▭^{lo} sub A B, A G.



Ex natura Ellipsis per 17. 3^{tii} Conic. Apollonii
est ▭ F A C ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B
cd —— *bf* + *bx* —— *ael* ad *kl* + *ek*
Est autem per 23. 6^{ti} ratio ▭^{li} F A C ad ▭ G I H
cd —— *bf* + *bx*
composita ex ratione F A ad I H seu I K + K H, &
d ———— *f* + *x*
ex ratione C A ad G I, id est, assumendo commu-
c —— *h*
B C
nem altitudinem *b*, ex ratione ▭^{li}
β
B C, C A ad ▭ B C, G I vel ▭ C A, A G, sive, reje-
bc ———— *bh* seu *cz*
C A
ctâ communi altitudine *c*, ex ratione B C ad A G.
b —— *z*.

Iam verò, quia ex natura Ellipsis ▭ F A C est ad ▭ G I H, ut ▭ E A B ad ▭ E I B; & quidem ratio ▭^{li} F A C ad ▭ G I H composita sit ex ratione F A ad I H seu I K + K H, & ex ratione C A ad G I, id est, assumendo communem altitudinem B C, ex ratione ▭^{li} B C, C A ad ▭ B C, G I vel β ▭ C A, A G, sive etiam, re-

Simi-

Similiter ratio □^{li} E A B ad □ E I B composita est

ae —— $kl+el$

ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.

e —— l $a-k+e$.

Quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi

e —— l b

altitudine sumatur, eadem est quæ □^{li}

γ

B C, E A ad □ B C, I B seu □ B A, B K, hoc est, eadem quæ δ F A ad K H.

be —— bl vel $ab-az$

d —— x

Sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitudine sumatur, eadem, quæ □^{li} A B, B C ad □ B C, E I

$a-k+e$ b

ab —— $bk+be$

ϵ α

vel □ B C, A I, id est, B A, A G, + □ B C, E A vel □ B A, A D, hoc est, relictâ communi altitudine A B, seu a, eadem quæ B C ad A G + A D.

sive az + ay,

b —— $z+y$.

Erit igitur ratio composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est,

d —— $f+x$ b —— z

per 23. 6^{ti}, ratio □^{li} F A, B C ad □ I K, A G + □ K H, A G,

bd —— $fz+xz$

eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,

d —— x

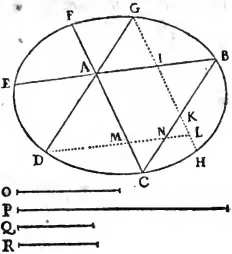
& ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6^{ti},

b —— $z+y$

eadem rationi, quam habet □ F A, B C ad □ K H, A G + □ K H, A D.

bd —— $xz+xy$.

jectâ communi altitudine C A, ex ratione B C ad A G; At ratio □^{li} E A B ad □ E I B composita ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I; quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi altitudine sumatur, est sicut □ B C, E A ad □ B C, I B seu γ □ B A, B K, quæ eadem ostensa est δ rationi F A ad K H; sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitudine sumatur, ut □ A B, B C, ad □ B C, E I, id est, ad □ B C, A I vel ϵ B A, A G, + □ B C, E A vel α □ B A, A D, sive etiam, relictâ communi altitudine A B, ut B C ad A G + A D: Erit ratio composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est, per 23. 6^{ti}, ratio □^{li} F A, B C ad □ I K, A G + □ K H, A G, eadem rationi, quæ componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D. id est, per 23. 6^{ti}, eadem rationi, quam habet □ F A, B C ad □ K H, A G + □ K H, A D.



Hinc cum
▭FA,BC, fit ad ▭IK,AG + ▭KH,AG, sicut idem ▭FA,BC ad
bd ——— $fz+xz$ ——— $bd/$
▭KH, AG + ▭KH, AD: erit, per 9. 5ti,
ad $xz+xy$:

▭IK,AG + ▭KH,AG æq. ▭KH,AG + ▭KH,AD.
$fz+xz$ ∞ $xz+xy$.

Vnde, dempto utrinque communi ▭lo KH, AG,
xz
erit quoque reliq. ▭IK, AG æquale reliquo ▭lo
fz
KH, AD
xy

Ac proinde, per 16. 6ti,
ut IK ad KH, ita DA ad AG.
f —— x —— $y/$ ad z.

Hinc cum ▭ FA, BC ad ▭ IK, AG + ▭KH, AG eandem habeat rationem, quam idem ▭ FA, BC ad ▭ KH, AG + ▭ KH, AD: erit ▭ IK, AG + ▭ KH, AG æquale ▭lo KH, AG + ▭lo KH, AD. A quibus si commune auferatur ▭ KH, AG, erit quoque reliquum ▭ IK, AG æquale reliquo ▭lo KH, AD. Vnde erit ut IK ad KH, ita DA ad AG.

Sed

BC
Sed ut IK ad KH, ita est, aſſ. comm. altit. *b*,
f —— *x*

ζ
▭IK,BC vel▭CA,BK ad▭KH,BC.
bf *cb*—*cz* ——— *bx*.

AB
At DA ad AG, ita aſſ. comm. alt. *a*, eſt ▭DA,AB
y —— *z* *ay*

α
vel▭BC,AE ad▭AG,AB.
be ——— *az*.

Quare erit ut
▭CA,BK ad▭KH,BC, ita▭BC,AE ad▭AG,AB.
cb—*cz* —— *bx* ——— *be* / ad *az*.

δ BC
Cum autem ſupra ſit FA ad KH, i.e., aſſ. comm. alt. *b*,
d —— *x*
▭FA,BC ad▭KH,BC, ſicut▭AE,BC ad▭KB,BA,
bd ——— *bx* ——— *be* / ad *ab*—*az*,
hoc eſt, convertendo
▭KH,BC ad▭FA,BC, ſicut▭KB,BA ad▭AE,BC:
bx ——— *bd* ——— *ab*—*az* / ad *be*:
Erunt▭CA,BK ▭KH,BC ▭FA,BC tres magnitudines ab una parte,
cb—*cz* —— *bx* .... *bd*
&▭KB,BA ▭AE,BC ▭AG,AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata:
ab—*az* ..... *be* ——— *az*

Sed ut IK ad KH, ita eſt, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭IK, BC vel ζ▭CA, BK ad ▭KH, BC. At ſicut DA ad AG, ita, aſſumptâ communi altitudine AB, ▭DA, AB vel α▭BC, AE ad ▭AG, AB. Quare erit ut▭CA,BK ad ▭KH, BC, ita ▭BC, AE ad▭AG, AB. Cum autem ſupra ſit δ, ut FA ad KH, ſive, aſſumptâ communi altitudine BC, ▭FA, BC ad▭KH, BC, ita▭AE, BC ad ▭KB, BA; id eſt, convertendo, ▭KH, BC ad ▭FA, BC, ſicut ▭KB, BA ad▭AE, BC: erunt ▭CA, BK, ▭KH, BC, & ▭FA, BC 3 magnitudines ab una parte, & ▭KB BA, ▭AE, BC, & ▭AG, AB tres aliæ ab altera parte, quæ binæ ſumptæ in eadem ſunt ratione, quarumque proportio eſt perturbata.

Quare etiam per 23. 5[ti] ex æqualitate proportionales erunt

id est, ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ſicut ▭ K B, B A
cb—cz ——— *bd* ——— *ab—az*
B A
ad ▭ A G, B A, ſeu, rej. com. alt. *a*, ut K B ad A G.
——— *az*. . . . . *b—z*——*z*.

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, multiplicando ſc. tum extremos tum medios terminos, oſtendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò perveniſſe, ubi *cbz—czz æquatur bbd—bdz.*

Denique ut inveniatur A G ſeu *z*, quoniam ſumendo C A ſeu *c* pro communi altitudine,

K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G:
b—z —— *z* ——— *cb—cz* / ad *cz*:
erit ut

▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G.
cb—cz ——— *bd* ——— *cb—cz* / ad *cz*.

Hinc cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G
cb—cz *bd* *cz*
eandem habeat rationem, erit per 9. 5[ti],
▭ F A, B C. æq. ▭[lo] C A, A G.
bd ꝏ *cz*.

Vnde per 16. 6[ti] erit,
ut C A ad A F, ita B C ad A G.
c —— *d* —— *b* / ad *z*.

Quod erat propoſitum.

Vnde & ipſæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ K B, B A ad ▭ A G, B A, id eſt, relictâ communi altitudine B A, ita K B ad A G. Denique, quoniam, aſſumptâ communi altitudine C A, K B eſt ad A G, ſicut ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G: erit ut ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C, ita ▭ C A, K B ad ▭ C A, A G. Quocirca cum ▭ C A, B K ad ▭ F A, B C & ad ▭ C A, A G eandem habeat rationem, erit ▭ F A, B C æquale ▭[lo] C A, A G; ac proinde C A ad A F, ſicut B C ad A G. Quod erat demonſtrandum.

F I N I S.

Celeberrimi de Centro Oscillationis problematis solutio.

Viro Sapientissimo salutem dat

STEPHANVS GILLET,

Nulla in re tam irrito conatu laborarunt Viri Clarissimi, quam in centro oscillationis investigando; licet enim quadraginta abhinc annis mathematicus celebris nusquam gentium extiterit ullus, qui huic indagationi accuratissime haud incubuerit, quin etiam plurimi Εὕρηκα *audacter exclamarint; nullos tamen in errores incidit nullus. Næ ego aliena infelicitate minime exterritus, viam adeo expeditam inveni, ut ad scopum optatum recte pervenerim. Quo circa arbitror tibi rebus mathematicis gaudenti non ingratum fore, si hoc arcanum tantopere investigatum exhibuero.*

Centri oscillationis demonstratio.

I. *Definitio.*

OScillatio est ipsa agitatio penduli sua gravitate circa axem horizonti parallelum moti. V. G. Si pendulum, A, suam agitationem vi gravitatis incipiat in puncto μ. inhibeatque in puncto ν. ipsa agitatio hujus penduli totum arcum $\mu\nu$. percurrentis vocatur oscillatio.



II. *Definitio.*

Quorum pendulorum centra gravitatis arcus similes percurrunt, eadem suas oscillationes, similes faciunt, sicut pendula A & *b*.



III. *Definitio.*

Centrum oscillationis est punctum, quod in pendulo composito agitato perinde movetur, ac si nullo modo stipatum foret: ac proinde

ſi in extremo penduli ſimplicis reſideret, oſcillationes ſuas eodem tempore conficeret, atque pendulum compoſitum datum. Itaque tota difficultas huc recidit, ut inveniatur longitudo penduli ſimplicis, quod ſuas oſcillationes ſimiles eodem tempore conficiat, atque pendulum compoſitum datum: nam longitudo hujus penduli ſimplicis eadem eſt, atque diſtantia centri oſcillationis penduli compoſiti ab axe. Qua in inveſtigatione ut mens dirigatur, aliquid de gravitate, ſpatioque decurſo præmittendum eſt.

I. *Lemma.*

Gravia gravitatem habent a levioribus, quæ tantumdem aſcendunt, quantum graviora deſcendunt.

I. *Coroll.*

Hinc colliges mobili ſecundum horizontem moto gravitatem acquiri nullam: Quia nulla leviora aſcendunt.

II. *Coroll.*

Hinc animadvertis mobili circa centrum moto gravitatem acquiri nullam: ideo quod mobile haud magis deprimitur, quam extollitur.

III. *Coroll.*

Hinc vides gravitatem acquiri per ſolam deſcenſionem centri: quippe qui alii motus pro nihilo habeantur; ac proinde incidentiam gravis ſemper eſſe ſpectandam ex altitudine deſcenſionis centri.

IV. *Coroll.*



Hinc perſpicis duorum gravium ex eadem altitudine cadentium, quorum unum perpendiculariter, alterum vero oblique decidit; utriuſque velocitatem eandem eſſe in horizonte, ſive in plano horizonti parallelo: propterea quod gravitas per motum vel circa centrum, vel horizonti parallelum, neque intenditur, neque remittitur.

V. *Coroll.*



Hinc manifeſtum eſt velocitatem gravis penſilis, ſive penduli eandem eſſe, atque gravis ex eadem altitudine perp. decidentis: penſile enim nihil aliud eſt, quam grave oblique decidens.

VI. *Co-*

VI. *Coroll.*

Hinc clarum eſt eandem eſſe velocitatem in omnibus pendulis quorum centra gravitatis æque diſtant ab axibus, quandoquidem æqualiter deſcendunt.



VII. *Coroll.*

Hinc liquet eandem eſſe velocitatem ejuſdem plani tum in planum, tum in latus moti: utpote quod centrum utroque modo æque deprimatur.

II. *Lemma.*

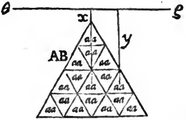
Duobus gravibus ex eadem altitudine cadentibus, quorum unum perp. alterum vero oblique ſecundum rectam lineam decidit; Tempora utriusque incidentiæ ſunt inter ſe ſicut utraque linea ſecundum quas incidunt; quandoquidem eadem eſt velocitas in utroque mobili æqualiter deſcendente.

Coroll.

Hinc ſequitur ut duobus gravibus ex eadem altitudine ſecundum ſingulas lineas rectas oblique cadentibus; Tempora utriuſque incidentiæ inter ſe referantur, ſicut utraque linea obliqua, vel ſicut ſpatia decurſa, ſi gravia ſint æqualia.

III. *Lemma.*

Si planum indefinite dividatur in partes aliquotas. Summa productorum ſingularum partium per ſuam ab axe diſtantiam multiplicatarum, æqualis eſt producto totius plani per ſui centri ab eodem axe diſtantiam multiplicati.



Sit planum (A B) indefinite diviſum in partes aliquotas (*aa*), ex quibus ſingulis dimittantur ſingulæ lineæ inter ſe parallelæ, eæque ad axem *θϱ* extra poſitum perpendiculares, quæ vocentur *y*: linea e plani centro ad eundem

axem perp. ducta appelletur x: dico summam omnium productorum, aay, esse æqualem producto abx.

Namque plani ita divisi singulæ partes perinde spectari possunt, ac si forent singula pondera: at ex geostatica summa productorum singulorum ponderum per suam ab axe distantiam multiplicatorum, æqualis est producto omnium ponderum per centri communis ab eodem axe distantiam multiplicatorum; Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc perspicuum est summam productorum singularum partium ejusdem plani multiplicatarum per singulas peripherias, quarum semidiametri sunt ipsæ perpend. ad axem, esse æqualem producto totius plani multiplicati per peripheriam, cujus semidiameter est ipsa distantia centri ab axe.

II. *Coroll.*

Hinc patet spatium a plano in planum circa axem extra positum moto decursum, æquari producto ipsius plani multiplicati per peripheriam, cujus semidiameter est distantia centri ipsius plani ab axe.

III. *Coroll.*

Hinc ultro emergit investigatio omnium solidorum a planis circa axes motis descriptorum; sed istæc alibi.

IV. *Coroll.*

Hinc deduces spatium a plano in planum circa axem extra positum moto decursum, æquari alteri spatio, quod percurreretur si singula puncta, vel singulæ partes aliquotæ plani tantumdem ab axe distarent, quantum ipsius centrum gravitatis.

V. *Coroll.*

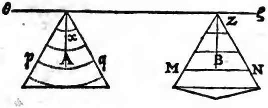
Hinc apparet spatia a planis æqualibus decursa, esse in eadem ratione, atque eorumdem planorum distantias centrorum gravitatis ab axe.

VI. *Coroll.*

Hinc nullo negotio reperias spatium a plano in latus moto decursum:

Si

Si enim planum A indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium sit idem axis $\theta\varrho$: conficiatur planum, *b*, cujus singulæ lineæ axi parallelæ æquentur singulis sectionibus cylindraceis, quæ tantumdem ab axe distant, V. G. linea recta M N. æquetur sectioni. *pq*. sicque de cæteris; ex hujus plani *b* centro linea



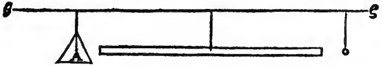
ad axem $\theta\varrho$ perp. ducta vocetur Z: ex plani A centro linea perpend. ducta ad eundem axem appelletur, *x*. Spatium a plano A in planum est ad spatium ab eodem plano in latus moto decursum, sicut *x*. *z*. nam spatium a plano A in latus moto decursum, æquatur spatio per planum *b* in planum motum decurso.

Iam vero centrum oscillationis collustretur.

I. *Problem.*

Invenire centrum oscillationis plani in planum circa axem extra positum moti.

Centrum oscillationis idem est, atque centrum gravitatis ipsius plani.



Cum enim, ex 6° corollario primi lemmatis, & ex 4° coroll. 3[tii] lemmatis, planum A eadem velocitate, idem spatium percurrat, quod percurreret si ipsius omnia puncta tantumdem ab axe distarent, quantum centrum gravitatis; necesse est ut oscillationes suas eodem tempore perficiat, atque perficeret si singula puncta tantumdem ab axe distarent: atqui si singula puncta tantumdem ab axe distarent, oscillationes suas eodem tempore conficeret, atque pendulum simplex, cujus longitudo est ipsa distantia centri gravitatis ab axe, Ergo &c.

I. *Coroll.*

Hinc noveris omnium planorum, quorum centra gravitatis ab axe æque distant, idem esse centrum oscillationis in planum.

II. *Coroll.*

Hinc intelligis cujuslibet lineæ in planum circa axem extra positum motæ, centrum oscillationis idem esse, atque centrum gravitatis; Quandoquidem quælibet linea spectari potest, sicut planum minimæ latitudinis.

II. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis plani in latus circa axem extra positum moti.

Tempora oscillationum plani tum in planum, tum in latus moti, sunt inter se, sicut spatia utroque motu decursa; propterea quod utriusque oscillationis tempora perinde spectanda sunt, atque tempora incidentiarum duorum gravium æqualium ex eadem altitudine oblique decidentium..

III. *Probl.*

Invenire centrum oscillationis plani in latus circa axem extra positum moti.

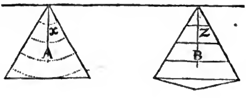
Si centri plani ab axe distantia vocetur x. tempusque oscillationis in planum, sit ad tempus oscillationis in latus, sicut x. z: hujus relationis x^2. z^2: x. $\frac{z^2}{x}$. ultimus terminus designabit distantiam centri oscillationis ab axe, sive longitudinem penduli simplicis, quod suas oscillationes similes eodem tempore conficit, atque pendulum in latus motum; propterea quod longitudines pendulorum simplicium sunt inter se, sicut quadrata temporum oscillationum.

IV. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis solidi.

Si solidum A, indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem sit axis, atque oscillationis; compona-

ponatur planum *b*, cujus singulæ lineæ axi parallelæ, sint inter se, sicut singulæ sectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe distant. Distantia centri hujus plani ab axe



vocetur *z*. distantiaque centri solidi ab eodem axe appelletur *x*. Tempus oscillationis solidi, est ad tempus oscillationis penduli simplicis, cujus longitudo sit *x*. sicut *z*. *x*. quandoquidem solidum spectari debet sicut planum in latus motum.

V. *Probl.*

Invenire centrum oscillationis solidi.

Hoc problema perinde solvitur, atque 3. prob. supra.

VI. *Probl.*

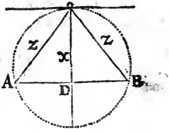
Invenire centrum oscillationis peripheriæ in latus circa tangentem motæ.

Distantia centri oscillationis ab axe, sive longitudo penduli simplicis oscillationes suas eodem tempore conficientis, refertur ad radium, sicut quadratoquadratum diametri ad productum circuli per se ipsum multiplicati; Quandoquidem spatium oscillatione in planum est ad spatium oscillatione in latus decursum, sicut circulus ad quadratum diametri, ut ex infinitorum geometria demonstratur.

VII. *Probl.*

Componere pendulum quod oscillationes suas eodem tempore conficiat, atque pendulum simplex datum.

Longitudo penduli simplicis dati sit diameter peripheriæ, quam axis tangit in puncto O. si hac in peripheria bina puncta A & B a puncto suspensionis æque distantia ad libitum sumantur; hæc duo puncta component pendulum, quod suas oscillationes in latus eodem tempore conficiet, atque pendulum simplex. ad quod probandum.



Hæc

Hæc duo puncta linea diametrum perp. secante in puncto D. jungantur, sectio diametri D O, vocatur x. linea A O sive B O appelletur z.

Ex supra dictis tempus oscillationis in planum, est ad tempus oscillationis in latus sicut $x . z$, ac proinde hujus relationis $x^2 . z^2 : x . \frac{z^2}{x}$. ultimus terminus sive diameter designabit longitudinem penduli simplicis, quod oscillationes suas eodem tempore conficit, atque pendulum ex istis binis punctis compositum, in latus motum.

Coroll.

Hinc tibi confestim occurrunt infinita pendula composita, quæ suas quodque oscillationes eodem tempore conficiunt: verum haud scio an obstupescas quod peripheria suas oscillationes breviore tempore perficiat, quam pendulum simplex, cujus longitudo est ipsa diameter, cum peripheria integra resolvi possit in pendula simpliciora componentia, quorum singula suam quodque oscillationem eodem tempore seorsim conficiant; mirari tamen desines si perspexeris majorem esse gravitatem in peripheria conglutinata, quam in omnibus ipsius partibus disjunctim motis.

VIII. *Probl.*

Invenire durationem oscillationis cujuslibet penduli circa axem intra positum moti.

Si pendulum A, cujus distantia ab axe vocetur x. indefinite dividatur per superficies cylindraceas parallelas, quarum omnium idem sit axis, atque oscillationis: componatur planum B, cujus singulæ lineæ axi parallelæ sint inter se, sicut singulæ sectiones cylindraceæ, quæ tantumdem ab axe distant: distantiaque centri plani B ab axe appelletur z: Tempus oscillationis penduli A, erit ad tempus oscillationis penduli simplicis, cujus longitudo sit x, sicut $z . x$.



F I N I S.